Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zur Grundlagen der Mathematik im Wintersemester 2019/2020, Blatt 4
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 4. November 2019

1. Eine *Partition* einer Menge M ist eine Menge nichtleerer Teilmengen von M, die paarweise disjunkt sind und deren Vereinigung ganz M ist. Für eine Partition P auf M definieren wir eine Relation $\sim_P$ indem dem wir für alle $a, b \in M$ definieren:

   $$a \sim_P b \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists A \in P(a \in A \wedge b \in A)$$

   Zeigen Sie, dass $\sim_P$ eine Äquivalenzrelation ist.

2. Wir wollen noch einmal die Relationen $\equiv \mod m$ auf den ganzen Zahlen vertiefen. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$. Angenommen, $a \equiv c \mod m$ und $b \equiv d \mod m$. In einer der Hausaufgaben wurde bereits gezeigt, dass in diesem Falle $a + b \equiv c + d \mod m$ gilt. Zeigen Sie nun

   $$a \cdot b \equiv c \cdot d \mod m.$$

3. Das Ergebnis aus Aufgabe 2 können wir wie folgt interpretieren: Für zwei ganze Zahlen a und b hängen die Äquivalenzklassen $[a+b]_m$ und $[a \cdot b]_m$ nur von den Äquivalenzklassen $[a]_m$ und $[b]_m$ ab, nicht aber von der Wahl der Repräsentanten a und b. Damit können wir auf dem Quotienten $\mathbb{Z}/\equiv \mod m$ die folgenden Operationen definieren: Für $a, b \in \mathbb{Z}$ seien $[a]_m + [b]_m = [a+b]_m$ und $[a]_m \cdot [b]_m = [ab]_m$.

   Wenn die Kongruenz modulo m nicht so gutartig wäre, was könnte bei einer Definition der Form $[a] + [b] = [a + b]$ schief gehen? Dazu betrachten wir die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ mit den Äquivalenzklassen $A = \{\dots, -2, -1\}$, $B = \{0\}$ und $C = \{1, 2, \dots\}$. Auch hier wollen wir $[a]_\sim + [b]_\sim = [a + b]_\sim$ definieren. Was ist das Problem?

B: Hausaufgaben zum 11. November 2019

1. Sei $m \in \mathbb{Z}$. Den Quotientenraum $\mathbb{Z}/\equiv \mod m$ schreibt man meistens als $\mathbb{Z}_m$ oder als $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Auf $\mathbb{Z}_m$ seien die Operationen $+$ und $\cdot$ definiert wie in der Präsenzaufgabe 2.

   Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ die Assoziativ- und Kommutativgesetze sowie das Distributivgesetz erfüllt.

2. (a) Gibt es in $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ neutrale Elemente bezüglich der Addition oder Multiplikation? Wenn ja, wie lauten diese?

   (b) Gibt es in $\mathbb{Z}_m$ Inverse bezüglich der Addition? Wie sehen diese aus?

3. Wir setzen $m = 8$. Welche $a \in \mathbb{Z}_m$ besitzen Inverse bezüglich der Multiplikation? Wie lauten diese?

4. Sei M eine nichtleere Menge. Wir definieren eine Operation $+$ auf $\text{Pot}(M)$ mittels

   $$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Für $\cdot$ definieren wir einfach $A \cdot B = A \cap B$.

Zeigen Sie, dass $(\mathrm{Pot}(M), +, \cdot)$ alle Körperaxiome bis auf die Existenz von Inversen bezüglich der Multiplikation erfüllt.

5. Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper. Für jedes $x \in \mathbb{K}$ schreiben wir x^2 als Abkürzung für $x \cdot x$. Zeigen Sie, dass die bekannte binomische Formeln $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ gilt. Geben Sie in jedem Rechenschritt genau an, welches Körperaxiom Sie benutzen.