Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zur Grundlagen der Mathematik im Wintersemester 2019/2020, Blatt 3
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 28. Oktober 2019

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\{1, \dots, n+1\}$ genau doppelt so viele Teilmengen wie die Menge $\{1, \dots, n\}$ hat. (Mit diesem Argument lässt sich beweisen, dass $\{1, \dots, n\}$ genau 2^n Teilmengen hat. Insbesondere dürfen Sie diese Tatsache für diese Aufgabe nicht benutzen.)

   Lösung. Für jede Teilmenge A von $\{1, \dots, n\}$ gibt es genau zwei Teilmengen B von $\{1, \dots, n+1\}$ mit $B \cap \{1, \dots, n\} = A$, nämlich A selbst und $A \cup \{n+1\}$. Das zeigt, dass $\{1, \dots, n+1\}$ genau doppelt so viele Teilmengen wie $\{1, \dots, n\}$ hat.

2. Wir untersuchen die Relation $\equiv (\mod 7)$ (also die Relation „kongruent modulo 7“) auf den ganzen Zahlen.

   (a) Bestimmen Sie für alle $a \in \{-1, 0, 1, 2, 6, 7, 8\}$ die Mengen
   $$[a]_7 := \{x \in \mathbb{Z} : a \equiv x \mod 7\}.$$

   (b) Wieviele unterschiedliche Mengen $[a]_7$ gibt es?

   (c) Seien $u \in [1]_7$ und $v \in [6]_7$. Was können Sie über $u + v$ und $u \cdot v$ aussagen?

   (d) Bestimmen Sie zu $a \in \{1, \dots, 6\}$ jeweils ein $b \in \mathbb{Z}$ mit $ab \equiv 1 \mod 7$. (In diesem Zusammenhang nennt man a und b zueinander *invers*, falls $ab \equiv 1 \mod 7$ gilt.)

   Lösung. (a) Im Allgemeinen ist $[a]_7 = a + 7\mathbb{Z} = \{\dots, a-7, a, a+7, \dots\}$. Speziell gilt $[-1]_7 = \{\dots, -8, -1, 6, \dots\}$, $[0]_7 = 7\mathbb{Z} = \{\dots, -7, 0, 7, \dots\}$, $[1]_7 = 1 + 7\mathbb{Z} = \{\dots, -6, 1, 8, \dots\}$ und so weiter. Es gilt $[-1]_7 = [6]_7$, $[0]_7 = [7]_7$ und $[1]_7 = [8]_7$.

   (b) Es gibt sieben verschiedene Mengen der Form $[a]_7$, nämlich $[0]_7, \dots, [6]_7$.

   (c) Es gilt $u + v \equiv 1 + 6 \mod 7$, also $u + v \in [0]_7$ und $uv \equiv 1 \cdot 6 \mod 7$, also $uv \in [-1]_7$.

   (d) Die Inversen zu $1, \dots, 6$ lauten 1, 4, 5, 2, 3, 6.

3. Zeigen Sie, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Relation $\equiv (\mod m)$ auf $\mathbb{Z}$ transitiv ist.

   Lösung. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv b \mod m$ und $b \equiv c \mod m$. Dann teilt m sowohl $b - a$ als auch $c - b$. Es gilt $c - a = (c - b) + (b - a)$. Damit ist $c - a$ auch durch m teilbar, als Summe zweier Zahlen, die durch 7 teilbar sind. Das zeigt $a \equiv c \mod m$.

B: Hausaufgaben zum 4. November 2019

1. Sei $A = \{0\}$ und $B = \{1, 2\}$. Bestimmen Sie die Potenzmengen von A, $A \cup B$, $A \times B$ und $B \setminus A$. (4 Punkte)

   Lösung. Die Potenzmenge von A hat zwei Elemente, die von $A \cup B$ acht, die Potenzmengen von $A \times B$ und $B \setminus A$ haben jeweils vier Elemente. Wie die Teilmenge der vier Mengen genau aussehen, schreibt man schnell hin.

2. Seien A und B Mengen mit $\mathrm{Pot}(A) = \mathrm{Pot}(B)$. Zeigen Sie $A = B$. (4 Punkte)

   Lösung. Ist die Menge P eine Potenzmenge, so ist $\{a : \{a\} \in P\}$ die Menge, deren Potenzmenge P ist.

   Alternativ: Gilt $\mathrm{Pot}(A) = \mathrm{Pot}(B)$, so ist $A \in \mathrm{Pot}(B)$, also $A \subseteq B$. Umgekehrt gilt $B \in \mathrm{Pot}(A)$, also $B \subseteq A$. Das zeigt $A = B$.

3. Sei $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

   (a) Die Relation $\equiv (\mod m)$ auf $\mathbb{Z}$ ist reflexiv und symmetrisch. (4 Punkte)

   (b) Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gilt:

   $$(a \equiv b(\mod m) \land c \equiv d(\mod m)) \Rightarrow a + c \equiv b + d(\mod m)$$

   (4 Punkte)

   Lösung. (a) Für alle $a \in \mathbb{Z}$ ist $a - a = 0$ durch m teilbar. Damit gilt $a \equiv a \mod 7$. Das zeigt die Reflexivität von $\equiv (\mod 7)$. Außerdem ist $b - a$ genau dann durch m teilbar, wenn $a - b$ durch m teilbar ist. Also gilt $a \equiv b \mod m$ genau dann, wenn $b \equiv a \mod m$ gilt. Das zeigt die Symmetrie.

   (b) Es gilt $(b + d) - (a + c) = (b - a) + (d - c)$. Wegen $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ und $c \equiv d(\mathrm{mod}\ m)$ sind die Differenzen $b - a$ und $d - c$ durch m teilbar. Es folgt, dass auch $(b + d) - (a + c)$ durch m teilbar ist. Das zeigt $a + c \equiv b + d(\mathrm{mod}\ m)$.

4. Wir betrachten die Relation $\equiv (\mathrm{mod}\ 11)$ auf $\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie zu allen Elementen a der Menge $\{1, \ldots, 10\}$ ein *Inverses*, also ein $b \in \mathbb{Z}$ mit $ab \equiv 1 \mod 11$. (4 Punkte)

   Lösung. Die Inversen zu $1, \ldots, 10$ lauten $1, 6, 4, 3, 9, 2, 8, 7, 5, 10$.