Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zur Grundlagen der Mathematik im Wintersemester 2019/2020, Blatt 3
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 28. Oktober 2019

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\{1,\dots,n+1\}$ genau doppelt so viele Teilmengen wie die Menge $\{1,\dots,n\}$ hat. (Mit diesem Argument lässt sich beweisen, dass $\{1,\dots,n\}$ genau 2^n Teilmengen hat. Insbesondere dürfen Sie diese Tatsache für diese Aufgabe nicht benutzen.)

2. Wir untersuchen die Relation $\equiv (\mod 7)$ (also die Relation „kongruent modulo 7") auf den ganzen Zahlen.

   (a) Bestimmen Sie für alle $a \in \{-1,0,1,2,6,7,8\}$ die Mengen
   $$[a]_7 := \{x \in \mathbb{Z} : a \equiv x \mod 7\}.$$

   (b) Wieviele unterschiedliche Mengen $[a]_7$ gibt es (für beliebige $a \in \mathbb{Z}$)?

   (c) Seien $u \in [1]_7$ und $v \in [6]_7$. Was können Sie über $u+v$ und $u \cdot v$ aussagen?

   (d) Bestimmen Sie zu $a \in \{1,\dots,6\}$ jeweils ein $b \in \mathbb{Z}$ mit $ab \equiv 1 \mod 7$. (In diesem Zusammenhang nennt man a und b zueinander *invers*, falls $ab \equiv 1 \mod 7$ gilt.)

3. Zeigen Sie, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Relation $\equiv (\mod m)$ auf $\mathbb{Z}$ transitiv ist.

B: Hausaufgaben zum 4. November 2019

1. Sei $A = \{0\}$ und $B = \{1,2\}$. Bestimmen Sie die Potenzmengen von A, $A \cup B$, $A \times B$ und $B \setminus A$. (4 Punkte)

2. Seien A und B Mengen mit $\mathrm{Pot}(A) = \mathrm{Pot}(B)$. Zeigen Sie $A = B$. (4 Punkte)

3. Sei $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

   (a) Die Relation $\equiv (\mod m)$ auf $\mathbb{Z}$ ist reflexiv und symmetrisch. (4 Punkte)

   (b) Für alle $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ gilt:
   $$(a \equiv b (\mod m) \wedge c \equiv d (\mod m)) \Rightarrow a + c \equiv b + d (\mod m)$$
   (4 Punkte)

4. Wir betrachten die Relation $\equiv (\mod 11)$ auf $\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie zu allen Elementen a der Menge $\{1,\dots,10\}$ ein *Inverses*, also ein $b \in \mathbb{Z}$ mit $ab \equiv 1 \mod 11$. (4 Punkte)