Übungen zur Grundlagen der Mathematik im Wintersemester 2019/2020, Blatt 2
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 21. Oktober 2019

1. Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist. Die Sprache kann dabei eine natürliche Sprache, aber auch eine formale Sprache sein. Prüfen Sie, ob es sich um Aussagen handelt.

   (a) Österreich liegt am Meer.

   (b) Bitte setzen Sie sich!

   (c) Wie spät ist es?

   (d) Jede gerade Zahl ist durch zwei teilbar.

   (e) Dieser Satz ist falsch.

   Lösung. Bei (a) und (d) handelt es sich um Aussagen. (e) sieht aus wie eine Aussage, aber sowohl der Wahrheitswert „wahr“ als auch der Wahrheitswert „falsch“ führen zu einem Widerspruch. Es handelt sich also nicht um eine Aussage.

2. Seien a und b Aussagen. Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, dass die zusammengesetzte Aussage $(\neg a \vee b) \leftrightarrow (a \to b)$ immer wahr ist, unabhängig davon, welche Wahrheitswerte a und b haben.

   Lösung. Leichtes Nachrechnen.

3. Eine Aussageform ist ein sprachliches Gebilde, in dem Variablen vorkommen, so dass man eine Aussage erhält, sobald man den Variablen konkrete Werte in einer vorgegebenen Grundmenge zuweist. Prüfen Sie, ob die folgenden Sätze Aussageformen sind.

   (a) x löst die Gleichung $\cos x = e^x$. (Grundmenge $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

   (b) n ist eine Primzahl. (Grundmenge $\mathbb{N}$)

   (c) Radfahrer benutzen bitte den Radweg.

   (d) $a^2 + b^2 = c^2$

   (e) $x \neq x$

   Lösung. Bei (a) und (b) handelt es sich um Aussageformen, bei (c) nicht. Bei (d) und (e) handelt es sich um Aussageformen, wobei jedoch die Angabe der Grundmengen fehlt. Die Zahlbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind für (d) sinnvoll. Jede Menge ist eine sinnvolle Grundmenge für die Aussageform in (e).

4. Aussageformen kann man benutzen, um Mengen zu definieren. So ist $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist Primzahl}\}$ die Menge der Primzahlen, defniert in der Grundmenge $\mathbb{N}$ durch die Aussageform „n ist Primzahl“. Beschreiben Sie die folgenden Mengen mit Hilfe einer Aussageform.

   (a) Alle rationalen Zahlen, deren Quadrat kleiner als 2 ist.

(b) Alle ganzen Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 1 liefern.

Lösung. (a) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$

(b) $\{z \in \mathbb{Z} :$ Bei Division von z durch 3 ergibt sich der Rest $1\}$

B: Hausaufgaben zum 28. Oktober 2019

1. Aussageform $a(n)$: „n ist durch 4 teilbar." Aussageform $b(n)$: „n ist eine gerade Zahl." Was trifft für alle natürlichen Zahlen n zu?

   (a) $a(n) \Rightarrow b(n)$
   (b) $b(n) \Rightarrow a(n)$
   (c) $a(n) \Leftrightarrow b(n)$
   (d) $\neg b(n) \Rightarrow a(n)$

   (4 Punkte)

   Lösung. Wenn eine natürliche Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist sie auch gerade. Das zeigt das (a) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Zahl 2 ist gerade, aber nicht durch 4 teilbar. Damit sind sowohl (b) als auch (c) für $n = 2$ falsch. Die 3 ist ungerade, aber nicht durch 4 teilbar. Damit ist (d) für $n = 3$ falsch.

2. a, b und c seien Aussagen. Zeigen Sie mit Hilfe des Wahrheitstafelverfahrens, dass die zusammengesetze Aussage $(a \wedge (b \wedge c)) \rightarrow (a \wedge b)$ eine Tautologie ist. (4 Punkte)

3. Sei M eine Menge und $A, B, C \subseteq M$. Zeigen Sie mit Hilfe des Wahrheitstafelverfahrens die Gleichung
$$\overline{A} \cap \overline{B \cup C} = \overline{A \cup B} \cap \overline{C}.$$
   Das Komplement ist hier bezüglich M gemeint. (4 Punkte)

   Lösung. Sei a die Aussageform $x \in A$, b die Aussageform $x \in B$ und c die Aussageform C. Für alle $x \in M$ gilt $x \in \overline{A} \cap \overline{B \cup C}$ genau dann, wenn $\neg a \wedge \neg(b \vee c)$ wahr ist. Ebenso gilt $x \in \overline{A \cup B} \cap \overline{C}$ genau dann, wenn $\neg(a \vee b) \wedge \neg c$ wahr ist. Mit Hilfe des Wahrheitstafelverfahrens rechnet man nun schnell nach, dass $\neg a \wedge \neg(b \vee c)$ und $\neg(a \vee b) \wedge \neg c$ äquivalent sind.

4. Vereinfachen Sie den Ausdruck
$$\overline{(\overline{B} \cap (A \cap B)) \cup ((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A})}$$
   mit Hilfe der Rechenregeln im Skript. (4 Punkte)

   Lösung.
$$\begin{aligned}
\overline{\big(\overline{B} \cap (A \cap B)\big) \cup \big((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}\big)} &= \overline{\big(\overline{B} \cap (B \cap A)\big) \cup \big((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}\big)} \\
&= \overline{\big((\overline{B} \cap B) \cap A\big) \cup \big((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}\big)} = \overline{(\emptyset \cap A) \cup \big((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}\big)} \\
&= \overline{\emptyset \cup \big((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}\big)} = \overline{(A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}} = \overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{\overline{A}} = (\overline{A} \cup B) \cap A \\
&= (\overline{A} \cap A) \cup (B \cap A) = \emptyset \cup (B \cap A) = A \cap B
\end{aligned}$$

5. Beschreiben Sie mit Hilfe von Aussageformen die folgenden Mengen:

   (a) Alle Paare (a, b) ganzer Zahlen mit $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$.
   (b) Alle rationalen Zahlen, deren Quadrat 2 oder 3 ist.

   (4 Punkte)

   Lösung. (a) Wir multiplizieren die Gleichung auf beiden Seiten mit 3 und mit b. Das liefert $3a = 2b$. Damit lässt sich die Menge als $\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : 3a = 2b\}$ schreiben.

   (b) Die Menge lässt sich schreiben als $\{q \in \mathbb{Q} : q^2 = 2 \vee q^2 = 3\}$. Wenn man weiß, dass $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ beide irrational sind, stellt man fest, dass diese Menge leer ist. Wenn man trotzdem darauf besteht, die Menge mit Hilfe einer Aussageform als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ zu schreiben, funktioniert auch $\{q \in \mathbb{Q} : q \neq q\}$.