Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zur Grundlagen der Mathematik im Wintersemester 2019/2020, Blatt 13
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 20. Januar 2020

1. Wahr oder falsch? (Kurze Begründung!)

   (a) $89 \equiv 16 \pmod 5$

   (b) $89 \equiv -16 \pmod 5$

   (c) $-108 \equiv 11 \pmod{17}$

   (d) $-99 \equiv -1 \pmod 4$

   Lösung. (a) ist falsch. $89 \equiv -1 \pmod 5$ und $16 \equiv 1 \pmod 5$.

   (b) Ist richtig, da $-16 \equiv -1 \pmod 5$.

   (c) ist richtig. Es gilt nämlich $11 - (-108) = 119$ und $119 = 7 \cdot 17$.

   (d) ist falsch. $-99 - (-1) = -98$ ist nicht durch 4 teilbar.

2. Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 + \overline{3}x + \overline{2} = \overline{0}$ in $\mathbb{Z}_5$. Hinweis: Benutzen Sie quadratische Ergänzung. Die binomischen Formeln gelten in jedem Körper! Dabei ist $2a$ in jedem beliebigen Körper die Abkürzung für $a + a$.

   Lösung. Zunächst stellen wir fest, dass in $\mathbb{Z}_5$ die Gleichung $\overline{3} = \overline{4}+\overline{4}$ gilt. Wir schreiben $x^2+\overline{3}x+\overline{2}$ als $x^2 + 2 \cdot \overline{4} \cdot x + \overline{4}^2 + \overline{1}$, oder, mit der binomischen Formel, als $(x + \overline{4})^2 + \overline{1}$. Damit ergibt sich die Gleichung $(x+\overline{4})^2+\overline{1} = \overline{0}$. Wir addieren auf beiden Seiten $\overline{4}$ und erhalten $(x+\overline{4})^2 = \overline{4}$. Wurzelziehen liefert $x+\overline{4} = \pm\overline{2}$. Wir addieren auf beiden Seiten $\overline{1}$ und erhalten $x = \overline{1}\pm\overline{2}$, also $x_1 = \overline{3}$ und $x_2 = \overline{4}$.

3. Bestimmen Sie die gemeinsamen Teiler von 15 und 21. Schreiben Sie den größten gemeinsamen Teiler d von 15 und 21 in der Form $d = 15s + 21t$ mit $s, t \in \mathbb{Z}$.

   Lösung. Die gemeinsamen Teiler von 15 und 21 sind ± 1 und ± 3. Damit ist 3 der größte gemeinsame Teiler. Es gilt $3 = 3 \cdot 15 - 2 \cdot 21$.

B: Hausaufgaben zum 27. Januar 2020 (freiwillig)

1. Es seien $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Weiter sei $T(a) = \{t \in \mathbb{Z} : t|a\}$ die Menge aller Teiler von a. Analog sei $T(b)$ definiert.

   Zeigen Sie:

   (a) $T(a) \cap T(b)$ ist nicht leer und beschränkt. (4 Punkte)

   (b) In Hausaufgabe 3 vom zwölften Übungsblatt hatten wir eine positive Zahl d gefunden, die a und b teilt und die von allen gemeinsamen Teilern von a und b geteilt wird. Wir können dabei $d > 0$ annehmen. Dann ist $d = \max(T(a) \cap T(b))$. (4 Punkte)

   (c) Es sei $a = bu + v$ für gewisse $u, v \in \mathbb{Z}$. Dann ist $T(a) \cap T(b) = T(b) \cap T(v)$ und damit haben a und b denselben größten gemeinsamen Teiler wie b und v. (4 Punkte)

Lösung. (a) Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $m = nk$. Dann ist $1 \leq k$ und damit $1k \leq m$, also $k \leq m$. Das zeigt, dass in $\mathbb{N}$ keine Zahl einen Teiler hat, der größer ist als die Zahl selbst. Es folgt, dass kein $a \in \mathbb{Z} \setminus 0$ einen Teiler hat, der größer ist als ihr Betrag $|a|$ oder kleiner als $-|a|$ Damit sind $T(a)$ und $T(b)$ beide beschränkt. Es folgt, dass auch $T(a) \cap T(b)$ beschränkt ist. Weiter gilt $1 \in T(a) \cap T(b)$.

(b) Die Zahl d ist ein gemeinsamer Teiler von a und b. Also gilt $d \in T(a) \cap T(b)$. Ist t ein weiterer gemeinsamer Teiler von a und b, so gilt $t|d$ und damit $t \leq d$ wie in (a). Das zeigt $d = \max(T(a) \cap T(b))$.

(c) Sei t ein gemeinsamer Teiler von a und b. Wegen $v = a - bu$ ist t auch ein Teiler von v. Also sind alle gemeinsamen Teiler von a und b auch gemeinsame Teiler von b und v. Ist umgekehrt t ein gemeinsamer Teiler von b und v, so ist t wegen $a = bu + v$ auch ein Teiler von a, und damit ein gemeinsamer Teiler von a und b. Es folgt, dass a und b denselben größten gemeinsamen Teiler haben wie b und v.

2. Finden Sie den größten gemeinsamen Teiler von 768 und 216 mit Hilfe des euklidischen Algorithmus. Finden Sie $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(768, 216) = s \cdot 768 + t \cdot 216$. (4 Punkte)

   Lösung. Wir führen den euklidischen Algorithmus durch:

$$\begin{aligned} 768 &= 3 \cdot 216 + 120 \\ 216 &= 1 \cdot 120 + 96 \\ 120 &= 1 \cdot 96 + 24 \\ 96 &= 4 \cdot 24 + 0 \end{aligned}$$

   Aus der vorletzen Gleichung ergibt sich durch Umstellen $24 = 120 - 96$. Aus der zweiten Gleichung erhält man $96 = 216 - 120$. Einsetzen liefert $24 = 120 - (216 - 120) = 2 \cdot 120 - 216$. Die erste Gleichung liefert $120 = 768 - 3 \cdot 216$. Weiteres Einsetzen ergibt $24 = 2 \cdot (768 - 3 \cdot 216) - 216 = 2 \cdot 768 - 7 \cdot 216$. Damit leisten $s = 2$ und $t = -7$ das Gewünschte.

   Die Rechnung kann man kürzer auch als

$$24 = 120 - 96 = 120 - (216 - 120) = 2 \cdot 120 - 216 = 2 \cdot (768 - 3 \cdot 216) - 216 = 2 \cdot 768 - 7 \cdot 216$$

   aufschreiben.