Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zur Grundlagen der Mathematik im Wintersemester 2019/2020, Blatt 12
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 13. Januar 2020

Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ heißt *Primzahl*, falls n nur die *trivialen* Teiler 1, -1, n und $-n$ besitzt.

1. Für $u, v, n \in \mathbb{N}$ gelte $u \cdot v = n$. Zeigen Sie, dass $u \leq \sqrt{n}$ oder $v \leq \sqrt{n}$ gilt. Folgern Sie, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$, die keine Primzahl ist, einen Teiler t besitzt, so dass $2 \leq t \leq \sqrt{n}$ gibt.

2. Notieren Sie die kleinsten zehn Primzahlen. Welche der folgenden Zahlen sind Primzahlen?

$$1, \quad \pi, \quad 101, \quad 2^7 - 1, \quad 2^8 + 1, \quad 10^{20} - 1$$

3. Es sei $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 01\}$ und t die kleinste natürliche Zahl ≥ 2, die a teilt. Beweisen Sie, dass t existiert und eine Primzahl ist.

B: Hausaufgaben zum 20. Januar 2020

1. Es sei $(G, *)$ eine Gruppe mit einem neutralen Element e. Zeigen Sie, dass für alle $g \in G$ gilt:

   (a) g hat höchstens ein inverses Element. (2 Punkte)

   (b) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $(g^k)^{-1} = g^{-k}$. (Hier dürfen Sie 6.14 (1) benutzen.) (2 Punkte)

   (c) Für alle $k, \ell \in \mathbb{Z}$ gilt $(g^\ell)^k = g^{\ell \cdot k}$. (Für $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ wurde das schon gezeigt.) (2 Punkte)

   (d) Die Menge $\langle g \rangle = \{g^k : k \in \mathbb{Z}\}$ bildet eine Untergruppe von G. (2 Punkte)

2. Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$. Auf Blatt 4 hatten wir eine Multiplikation $\cdot$ auf der Menge $\mathbb{Z}_m$ definiert. Zeigen Sie, dass die bezüglich $\cdot$ invertierbaren Elemente von $\mathbb{Z}_m$ mit der Verknüpfung $\cdot$ eine Gruppe bilden. (Es ist leicht zu sehen, dass $(Z_m, +)$ eine Gruppe ist. Interessanterweise gibt aber offenbar auch die Multiplikation auf $\mathbb{Z}_m$ Anlass zu einer Gruppenstruktur, wenn man sich auf die bezüglich $\cdot$ invertierbaren Elemente beschränkt.) (4 Punkte)

3. Gegeben seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$. Weiter sei $L = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie:

   (a) $a \in L$. (2 Punkte)

   (b) L ist eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$. (2 Punkte)

   (c) Mit $a \in L$ ist wegen (b) auch $|a| \in L$. Also ist $L \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$. Sei d das kleinste Element von $L \cap \mathbb{N}$. Dann ist d ein Teiler von a und b. (2 Punkte) (Hinweis: Man führe Divisionen mit Rest von a und b durch d durch und stelle fest, dass die Reste jeweils in L liegen.)

   (d) Alle gemeinsamen Teiler von a und b sind auch Teiler von d. (2 Punkte)

   Die Zahl d ist der größte gemeinsame Teiler von a und b. Aus der Aufgabe geht hervor, dass sich der größte gemeinsame Teiler von a und b in der Form $ax + by$ schreiben lässt, wobei die *Bézout-Koeffizienten* x und y ganze Zahlen sind.