Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zur Grundlagen der Mathematik im Wintersemester 2019/2020, Blatt 11
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 6. Januar 2020

1. Division mit Rest:
   (a) Führen Sie Division mit Rest von 115 durch 17 durch.
   (b) Wie in Teil a), aber Division mit Rest von -5 durch 17.

   Lösung. (a) $115 = 6 \cdot 17 + 13$

   (b) Es gilt $-5 = (-1) \cdot 17 + 12$. Hier muss man beachten, dass der Rest ≥ 0 sein muss.

2. Rechnen im Dezimalsystem:
   (a) Schreiben Sie 1839 und 2321 als Summe mit Zehnerpotenzen aus.
   (b) Addieren Sie die beiden Zahlen aus a) schriftlich. Warum liefert die schriftliche Addition das richtige Ergebnis?
   (c) Verfahren Sie analog mit dem Produkt $78 \cdot 32$.

   Lösung. (a) Es ist $1839 = 10^0 \cdot 9 + 10^1 \cdot 3 + 10^2 \cdot 8 + 10^3 \cdot 1$ und $2321 = 10^0 \cdot 1 + 10^1 \cdot 2 + 10^2 \cdot 3 + 10^3 \cdot 2$.

   (b) Es gilt

$$\begin{aligned} 1839 + 2321 &= 10^0 \cdot 9 + 10^1 \cdot 3 + 10^2 \cdot 8 + 10^4 \cdot 1 + 10^0 \cdot 1 + 10^1 \cdot 2 + 10^2 \cdot 3 + 10^3 \cdot 2 \\ &= 10^0 \cdot 10 + 10^1 \cdot 5 + 10^2 \cdot 11 + 10^3 \cdot 3 = 10^0 \cdot 0 + 10^1 \cdot 6 + 10^2 \cdot 1 + 10^3 \cdot 4 = 4160 \end{aligned}$$

   (c) Es ist $78 = 10^0 \cdot 8 + 10^1 \cdot 7$ und $32 = 10^0 \cdot 2 + 10^1 \cdot 3$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} 78 \cdot 32 &= (10^0 \cdot 8 + 10^1 \cdot 7) \cdot (10^0 \cdot 2 + 10^1 \cdot 3) = 10^0 \cdot 8 \cdot 2 + 10^1 \cdot 8 \cdot 3 + 10^1 \cdot 7 \cdot 2 + 10^2 \cdot 7 \cdot 3 \\ &= 10^0 \cdot 16 + 10^1 \cdot 38 + 10^2 \cdot 21 = 10^0 \cdot 6 + 10^1 \cdot 9 + 10^2 \cdot 4 + 10^3 \cdot 2 = 2496 \end{aligned}$$

3. Wir stellen die Zahl $a \in \mathbb{N}$ im Dezimalsystem dar:

$$a = \sum_{i=0}^{n} z_i \cdot 10^i,$$

   wobei die $z_i \in \{0, \ldots, 9\}$ die Ziffern sind.
   (a) Zeigen Sie: $2|a \Leftrightarrow 2|z_0$
   (b) Wahr oder falsch: $3|a \Leftrightarrow 3|\sum_{i=0} z_i$

   Lösung. (a) Offenbar ist $\sum_{i=1} z_i \cdot 10^i$ durch zwei teilbar. Damit ist $\sum_{i=0}^{n} z_i \cdot 10^i$ genau dann durch zwei teilbar, wenn z_0 durch zwei teilbar ist.

   (b) Das ist wahr. Eine Zahl ist genau dann durch drei teilbar, wenn die Quersumme (in der Dezimaldarstellung) durch drei teilbar ist. Zum Beweis rechne man einfach $\sum_{i=0}^{n} z_i \cdot 10^i$ modulo 3. Die Zehnerpotenzen haben bei Division durch drei alle den Rest 1. Damit ist der Rest der Zahl bei Division durch 3 derselbe wie bei Division der Quersumme durch 3.

B: Hausaufgaben zum 13. Januar 2020

1. Wie in der dritten Präsenzaufgabe sei $a = \sum_{i=0}^{n} z_i \cdot 10^i$. Zeigen Sie:

$$4|a \Leftrightarrow 4|(10z_1 + z_0)$$

(2 Punkte)

Lösung. Da 100 durch 4 teilbar ist, ist auch $a = \sum_{i=2} z_i \cdot 10^i$ durch 4 teilbar. Damit ist $\sum_{i=0} z_i \cdot 10^i$ genau dann durch 4 teilbar, wenn $10 \cdot z_1 + z_0$ durch 4 teilbar ist.

2. g-adische Arithmetik

   (a) Schreiben Sie die Dezimalzahl 2020 im Dual- und im Siebzehnersystem. (2 Punkte)

   (b) Berechnen Sie ohne Rückgriff auf das Dezimalsystem $(257)_8 + (12)_8$ und $(257)_8 \cdot (12)_8$. (2 Punkte)

   (c) Für welches g gilt $(576)_g + (331)_g = (1127)_g$? (2 Punkte)

   (d) Beweisen Sie die Eindeutigkeit der g-adischen Darstellung natürlicher Zahlen. (4 Punkte)

Lösung. (a) Es gilt $2020 = 17^2 \cdot 6 + 17 \cdot 16 + 14 = (6\text{GE})_{17}$, wobei G für 16 und E für 14 steht. Außerdem ist $2020 = 2^10 + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^2 = (11111100100)_2$.

(b) Wir addieren $(257)_8$ und $(12)_8$ schriftlich. Dabei tritt ein Übertrag auf, denn es gilt $7+2 = (11)_8$. Damit ist $(257)_8 + (12)_8 = (271)_8$. Es ist $(257)_8 \cdot (12)_8 = (2570)_8 + (257)_8 \cdot 2 = (2570)_8 + (536)_8 = (3326)_8$.

(c) Die Zahl g muss mindestens 8 sein, da in der g-adischen Darstellung Ziffern bis 7 auftreten. Weiter hat in der g-adischen Darstellung die Zahl $3 + 7$ die letzte Ziffer 2. Damit ist $g = 8$.

(d) Wir beweisen die Eindeutigkeit der g-adischen Darstellung von a mittels allgemeiner Induktion über $a \in \mathbb{N}$. Sei a minimal, so dass die g-adische Darstellung von a nicht eindeutig ist. Seien $(x_m \dots x_0)_g$ und $(y_n l \dots y_0)_g$ zwei g-adische Darstellungen von a. Es sei also

$$a = \sum_{i=0}^{m} x_i g^i = \sum_{i=0}^{n} y_i g^i.$$

Dann gilt

$$a = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i g^{i-1} \right) \cdot g + x_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i g^{i-1} \right) \cdot g + y_0.$$

Es gilt $0 \le x_0 < g$ und $0 \le y_0 < g$. Wegen der Eindeutigkeit von Quotient und Rest bei der Division mit Rest, folgt daraus $x_0 = y_0$ und

$$\sum_{i=1}^{m} x_i g^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} y_i g^{i-1}.$$

Da wegen der Minimalität von a folgt $m = n$ sowie $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$. Das zeigt, dass die beiden g-adischen Darstellungen von a identisch sind.

3. Wir betrachten $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \ge 2$. Wir wissen schon, dass $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ und $(\mathbb{Z}_m, \cdot_m)$ kommutative Halbgruppen mit den neutralen Elementen $\overline{0}$ beziehungsweise $\overline{1}$ sind. Zeigen Sie:

   (a) Jedes Element von $\mathbb{Z}_m$ besitzt ein Inverses bezüglich $+_m$. (2 Punkte)

   (b) Es gilt das Distributivgesetz. (2 Punkte)

   (c) Welches der Körperaxiome gilt eventuell nicht für die Struktur $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$? (Es handelt sich wirklich nur um ein Axiom.) (2 Punkte)

   (d) Handelt es sich bei $(\mathbb{Z}_{11}, +_{11}, \cdot_{11})$ um einen Körper? Was ist mit $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12}, \cdot_{12})$? (2 Punkte)

Lösung. (a) Sei $a \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $[a]_m +_m [-a]_m = [a-a]_m = [0]_m$. Damit ist $[-a]_m$ das zu $[a]_m$ bezüglich $+_m$ inverse Element von $\mathbb{Z}_m$.

(b) Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$[a]_m \cdot_m ([b]_m +_m [c]_m) = [a]_m \cdot_m [b+c]_m = [a \cdot (b+c)]_m = [a \cdot b + a \cdot c]_m = [a]_m \cdot_m [b]_m +_m [a]_m \cdot_m [c]_m.$$

(c) Das einzige Axiom, das eventuell nicht gilt, ist die Existenz inverser Elemente bezüglich $\cdot_m$. Zum Beispiel hat $[2]_4$ kein Inverses in $\mathbb{Z}_4$, was man schnell durch Ausprobieren sieht.

(d) Nach Hausaufgabe 4 von Blatt 3 hat jedes Element $\neq [0]_{11}$ von $\mathbb{Z}_{11}$ ein Inverses bezüglich $\cdot_{11}$. Andererseits ist $[3]_{12} \cdot [4]_{12} = [0]_{12} = [0]_{12} \cdot [4]_{12}$. Damit gilt die Kürzregel nicht in $\mathbb{Z}_{12}$ und damit hat $[4]_{12}$ kein Inverses bezüglich $\cdot_{12}$.