Übungen zur Grundlagen der Mathematik im Wintersemester 2019/2020, Blatt 11
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 6. Januar 2020

1. Division mit Rest:
   (a) Führen Sie Division mit Rest von 115 durch 17 durch.
   (b) Wie in Teil a), aber Division mit Rest von -5 durch 17.

2. Rechnen im Dezimalsystem:
   (a) Schreiben Sie 1839 und 2321 als Summe mit Zehnerpotenzen aus.
   (b) Addieren Sie die beiden Zahlen aus a) schriftlich. Warum liefert die schriftliche Addition das richtige Ergebnis?
   (c) Verfahren Sie analog mit dem Produkt $78 \cdot 32$.

3. Wir stellen die Zahl $a \in \mathbb{N}$ im Dezimalsystem dar:
$$a = \sum_{i=0}^{n} z_i \cdot 10^i,$$
   wobei die $z_i \in \{0, \dots, 9\}$ die Ziffern sind.
   (a) Zeigen Sie: $2|a \Leftrightarrow 2|z_0$
   (b) Wahr oder falsch: $3|a \Leftrightarrow 3| \sum_{i=0} z_i$

B: Hausaufgaben zum 13. Januar 2020

1. Wie in der dritten Präsenzaufgabe sei $a = \sum_{i=0}^{n} z_i \cdot 10^i$. Zeigen Sie:
$$4|a \Leftrightarrow 4|(10z_1 + z_0)$$
   (2 Punkte)

2. g-adische Arithmetik
   (a) Schreiben Sie die Dezimalzahl 2020 im Dual- und im Siebzehnersystem. (2 Punkte)
   (b) Berechnen Sie ohne Rückgriff auf das Dezimalsystem $(257)_8 + (12)_8$ und $(257)_8 \cdot (12)_8$. (2 Punkte)
   (c) Für welches g gilt $(576)_g + (331)_g = (1127)_g$? (2 Punkte)
   (d) Beweisen Sie die Eindeutigkeit der g-adischen Darstellung natürlicher Zahlen. (4 Punkte)

3. Wir betrachten $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$. Wir wissen schon, dass $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ und $(\mathbb{Z}_m, \cdot_m)$ kommutative Halbgruppen mit den neutralen Elementen $\overline{0}$ beziehungsweise $\overline{1}$ sind. Zeigen Sie:

(a) Jedes Element von $\mathbb{Z}_m$ besitzt ein Inverses bezüglich $+_m$. (2 Punkte)

(b) Es gilt das Distributivgesetz. (2 Punkte)

(c) Welches der Körperaxiome gilt eventuell nicht für die Struktur $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$? (Es handelt sich wirklich nur um ein Axiom.) (2 Punkte)

(d) Handelt es sich bei $(\mathbb{Z}_{11}, +_{11}, \cdot_{11})$ um einen Körper? Was ist mit $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12}, \cdot_{12})$? (2 Punkte)