Übungen zur Grundlagen der Mathematik im Wintersemester 2019/2020, Blatt 10
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 16. Dezember 2019

1. Für $a, n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $a^0 = 1$ und $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

   Zeigen Sie, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n < m$ gilt: $2^n < 2^m$

   Lösung. Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n < m$. Dann gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $n + k = m$. Wir zeigen durch vollständige Induktion über k, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $2^n < 2^{n+k}$

   Induktionsanfang: $k = 1$. Es ist $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 = 2^n + 2^n > 2^n$, da $2^n \in \mathbb{N}$ gilt (letzteres müssten wir streng genommen auch mittels Induktion zeigen).

   Induktionsschritt:. Wir nehmen an, dass $2^n < 2^{n+k}$ für ein gewisses $k \in \mathbb{N}$ gilt. Es ist

   $$2^{n+k+1} = 2^{n+k} \cdot 2 = 2^{n+k} + 2^{n+k} > 2^{n+k} > 2^n.$$

   Wegen der Transitivität von $<$ folgt $2^n < 2^{n+k+1}$.

   Das zeigt die Behauptung für alle $k \in \mathbb{N}$.

2. Wahr oder falsch?

   (a) „$\leq$“ auf $\mathbb{N}_0$ ist antisymmetrisch.

   (b) „$\leq$“ auf $\mathbb{N}_0$ ist transitiv.

   (c) „$-$“ ist eine Verknüpfung auf $\mathbb{N}_0$.

   (d) $(\mathbb{Q}, -)$ ist eine Halbgruppe.

   (e) $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ ist eine Halbgruppe.

   Lösung. (a) Ja, (b) Ja. (c) Nein, 1-2 ist zum Beispiel nicht definiert. (d) Nein, die Verknüpfung ist nicht assoziativ. (e) Ja.

3. Diskussion: In der Vorlesung wurden Potenzen in allgemeinen Halbgruppen $(H, *)$ mit einem neutralen Element eingeführt. Beispiele sind $(\mathbb{N}_0, +)$ und $(\mathbb{N}_0, \cdot)$. Im Falle von $+$ schreibt man die n-te Potenz von $a \in \mathbb{N}_0$ als $a \cdot n$, im Falle von $\cdot$ schreibt man die n-te Potenz von a als a^n. Wie kann man es schaffen, dabei nicht durcheinander zu kommen?

   Lösung. Wenn man die Verknüpfung der Halbgruppe in irgendeiner Form als Multiplikation schreibt, also als $\cdot$, $*$ oder $\circ$, dann benutzt man die Schreibweise a^n („hoch“). Wenn man die Verknüpfung als Addition schreibt, benutzt man „mal n“.

B: Hausaufgaben zum 6. Januar 2020

1. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 5$ die folgende Ungleichung gilt: $9n < 2^{n+1}$

   Lösung. Wir machen den Induktionsanfang bei $n = 5$. Es gilt $9 \cdot 5 = 45$ und $2^{5+1} = 2^6 = 64$. Damit ist $9 \cdot 5 < 2^{5+1}$. Das zeigt die Ungleichung für $n = 5$.

Sei nun $n \geq 5$ und gelte die Ungleichung für n. Letzteres ist die Induktionsannahme. Es gilt

$$9(n+1) = 9n + 9 < 2^{n+1} + 9 < \cdot 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+2},$$

da 2^{n+1} für $n \geq 5$ in jedem Falle größer als 9 ist, was aus der Präsenzaufgabe 1 folgt. Das zeigt die Ungleichung für $n+1$ und beendet den Induktionsschritt.

2. Für welche $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Ungleichung $n^2 < 2^n$?

   Lösung. Wir berechnen n^2 und 2^n für $n = 0, 1, \ldots, 5$ und erhalten für n^2 die Werte $0, 1, 4, 9, 16, 25$ und für 2^n die Werte $1, 2, 4, 8, 16, 32$. Eine nahe liegende Vermutung ist, dass $n^2 < 2^n$ genau für $n = 0$ und alle $n \geq 5$ gilt.

   Wir beweisen das durch vollständige Induktion über n. Für $n = 0, \ldots, 5$ haben wir das bereits nachgerechnet. Das liefert insbsesondere den Induktionsanfang.

   Nun sei $n \geq 5$ und es gelte $n^2 < 2^n$. Dann ist

   $$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

3. Sei $\Sigma = \{a, b, \ldots, z\}$ das Alphabet. Weiter sei Σ^* die Menge aller möglichen Wörter $x_1x_2\ldots x_n$, die man aus Zeichen aus Σ bilden kann, einschließlich des leeren Worts λ, das aus keinem Zeichen besteht. Auf Σ^* definieren wir die Operation $\frown$ (Konkatenation) wie folgt:

   Für $v, w \in \Sigma^*$ mit $v = x_1x_2\ldots x_n$ und $w = y_1y_2\ldots y_m$ sei $v \frown w = x_1x_2\ldots x_ny_1y_2\ldots y_m$.

   Zeigen sie, dass $(\Sigma^*, \frown)$ eine Halbgruppe mit dem neutralen Element λ ist.

   Lösung. Seien $u, v, w \in \Sigma^*$ mit $u = u_1u_2\ldots u_i$, $v = v_1v_2\ldots v_j$ und $w = w_1w_2\ldots w_k$. Dann gilt

   $$\begin{aligned}(u \frown v) \frown w = u_1u_2\ldots u_iv_1v_2\ldots v_j \frown w_1w_2\ldots w_k &= u_1u_2\ldots u_iv_1v_2\ldots v_jw_1w_2\ldots w_k \\ &= u_1u_2\ldots u_i \frown v_1v_2\ldots v_jw_1w_2\ldots w_k = u \frown (v \frown w).\end{aligned}$$

   Das zeigt die Assoziativität von $\frown$.

   Dass λ das neutrale Element ist, ist klar.

4. Gegeben sei eine Halbgruppe $(H, *)$ mit dem neutralen Element e. Zeigen Sie:

   Ist H kommutativ, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $a, b \in H$: $(a * b)^n = a^n * b^n$

   Lösung. Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion über n. Für den Induktionsanfang betrachten wir den Fall $n = 0$. Es gilt $(a * b)^0 = e = e * e = a^0 * b^0$.

   Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$ mit $(a * b)^n = a^n * b^n$. Dann ist

   $$(a * b)^{n+1} = (a * b)^n * (a * b).$$

5. . Die Multiplikation ist die Potenz der Addition. Die übliche Potenz ist die Potenz der Multiplikation. Wir definieren $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ durch $f(n, m) = n^m$. Ist $(\mathbb{N}_0, f)$ eine Halbgruppe? Begründen Sie Ihre Antwort.

   Lösung. $(\mathbb{N}_0, f)$ ist keine Halbgruppe, da f nicht assoziativ ist. Es gilt nämlich zum Beispiel $2^{(0^0)} = 2^1 = 2$, aber $(2^0)^0 = 1^0 = 1$.

   Wenn wir a^{b^c} schreiben, meinen wir damit $a^{(b^c)}$, nicht $(a^b)^c$.