Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zur Grundlagen der Mathematik im Wintersemester 2019/2020, Blatt 10
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 16. Dezember 2019

1. Für $a, n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $a^0 = 1$ und $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

   Zeigen Sie, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n < m$ gilt: $2^n < 2^m$

2. Wahr oder falsch?

   (a) „$\leq$“ auf $\mathbb{N}_0$ ist antisymmetrisch.

   (b) „$\leq$“ auf $\mathbb{N}_0$ ist transitiv.

   (c) „$-$“ ist eine Verknüpfung auf $\mathbb{N}_0$.

   (d) $(\mathbb{Q}, -)$ ist eine Halbgruppe.

   (e) $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ ist eine Halbgruppe.

3. Diskussion: In der Vorlesung wurden Potenzen in allgemeinen Halbgruppen $(H, *)$ mit einem neutralen Element eingeführt. Beispiele sind $(\mathbb{N}_0, +)$ und $(\mathbb{N}_0, \cdot)$. Im Falle von $+$ schreibt man die n-te Potenz von $a \in \mathbb{N}_0$ als $a \cdot n$, im Falle von $\cdot$ schreibt man die n-te Potenz von a als a^n. Wie kann man es schaffen, dabei nicht durcheinander zu kommen?

B: Hausaufgaben zum 6. Januar 2020

1. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 5$ die folgende Ungleichung gilt: $9n < 2^{n+1}$

2. Für welche $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Ungleichung $n^2 < 2^n$?

3. Sei $\Sigma = \{a, b, \dots, z\}$ das Alphabet. Weiter sei Σ^* die Menge aller möglichen Wörter $x_1x_2 \dots x_n$, die man aus Zeichen aus Σ bilden kann, einschließlich des leeren Worts λ, das aus keinem Zeichen besteht. Auf Σ^* definieren wir die Operation $\frown$ (Konkatenation) wie folgt:

   Für $v, w \in \Sigma^*$ mit $v = x_1x_2 \dots x_n$ und $w = y_1y_2 \dots y_m$ sei $v \frown w = x_1x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_m$.

   Zeigen sie, dass $(\Sigma^*, \frown)$ eine Halbgruppe mit dem neutralen Element λ ist.

4. Gegeben sei eine Halbgruppe $(H, *)$ mit dem neutralen Element e. Zeigen Sie:

   Ist H kommutativ, so gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ und alle $a, b \in H$: $(a * b)^n = a^n * b^n$

5. . Die Multiplikation ist die Potenz der Addition. Die übliche Potenz ist die Potenz der Multiplikation. Wir definieren $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ durch $f(n, m) = n^m$. Ist $(\mathbb{N}_0, f)$ eine Halbgruppe? Begründen Sie Ihre Antwort.