

4. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 15.11.17, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

1. Sei M eine Menge und seien R_1 und R_2 Äquivalenzrelationen auf M mit $R_2 \subseteq R_1$. Es bezeichne $q_{R_i} : M \rightarrow M/R_i$, $i = 1, 2$, die Quotientenabbildungen.

(a) Zeigen Sie, dass es genau eine Abbildung $f : M/R_2 \rightarrow M/R_1$ gibt mit $q_{R_1} = f \circ q_{R_2}$.

(b) Die in (a) definierte Abbildung f ist surjektiv.

(10 Punkte)

2. Die Menge $\mathbb{Q}[\sqrt{8}] := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{Q} : x = a + b\sqrt{8}\}$ wird durch die üblichen Verknüpfungen „+“ und „ $\cdot$ “ der reellen Zahlen

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{8}) + (c + d\sqrt{8}) &= (a + c) + (b + d)\sqrt{8}, \\ (a + b\sqrt{8}) \cdot (c + d\sqrt{8}) &= (ac + 8bd) + (ad + bc)\sqrt{8}\end{aligned}$$

ein Körper. Überprüfen Sie die folgenden Körperaxiome:

(a) Die Existenz der neutralen Elemente der Addition und Multiplikation.

(b) Die Existenz multiplikativer Inverse.

(c) Das Distributivgesetz.

(10 Punkte)

3. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die symmetrische Gruppe S_n definiert als die Gruppe der Bijektionen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$.

(a) Sei $\sigma \in S_n$. Wieso gilt $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$?

(b) Sei

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$$

und

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_4.$$

Berechnen Sie $\tau \circ \sigma$.

(c) Sei $\sigma \in S_4$ wie in Teil (b). Bestimmen Sie für $i = 1, 2, 3, 4$ die Menge

$$O_i := \{\sigma^n(i) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(d) Sei $\sigma \in S_4$ wie in Teil (b). Bestimmen Sie σ^n für $n \in \mathbb{N}$. Welches ist die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass $\sigma^m = e$?

(e) Zeigen Sie, dass S_6 nicht abelsch ist.

(12 Punkte)

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

- *4. (a) Sei $(G, *, e)$ eine Gruppe mit 4 Elementen e, a, b, c , so dass

$$a^2 = e, \quad b^2 = e, \quad c^2 = e.$$

Ergänzen Sie die Gruppentafel von $(G, *, e)$.

- (b) Sei $(H, *, e)$ eine Gruppe mit 4 Elementen e, a, b, c , so dass

$$a * b = e.$$

Vervollständigen Sie die Gruppentafel von $(H, *, e)$.

(8 Punkte)