Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michel van Garrel

27. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 11.07.18, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

Dies ist ein Bonusblatt. Es wird nur korrigiert für Studentinnen und Studenten, denen Punkte fehlen. Man braucht gesamthaft 208 Punkte um die Übungen des Sommersemesters zu bestehen.

1. Sei α ein nilpotenter Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V. Zeigen Sie: $\alpha + \mathrm{id}$ und $(\alpha + \mathrm{id})^2$ sind zueinander konjugiert. *(10 Punkte)*

2. (a) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{C}^*$. Geben Sie die Jordannormalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{C})$$

an. Mit Begründung!

(b) Wie kann die Jordannormalform einer Matrix $A \in M(10, \mathbb{C})$ mit Minimalpolynom $p_A = (T-2)^4(T+7)$ und charakteristischem Polynom $\chi_A = (T-2)^8(T+7)^2$ aussehen? Begründen Sie! *(12 Punkte)*

3. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $d_1, \ldots, d_s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_{d_s} \in \mathbb{C}^*$. Sei $A \in M(n, \mathbb{C})$ mit Jordannormalform

$$\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{d_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{d_s}(\lambda_{d_s}) \end{pmatrix},$$

wobei $J_d(\lambda) \in M(d, \mathbb{C})$ wie in der Vorlesung den Jordanblock mit Diagonaleintrag λ bezeichnet. Zeigen Sie: Die Jordannormalform von A^k, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ist

$$\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1^k) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{d_2}(\lambda_2^k) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{d_s}(\lambda_{d_s}^k) \end{pmatrix}.$$

(10 Punkte)