

24. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 20.06.18, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

Die erste Aufgabe ist eine *S*-Aufgabe. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine stilistisch perfekte Lösung aufzuschreiben. Die Hälfte der Punkte wird für die Darstellung vergeben.

- 1.^S Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie: Zu einem Endomorphismus $\varphi \in \text{End}(V)$ existiert genau ein Endomorphismus $\varphi^* \in \text{End}(V)$, so dass

$$\forall v, w \in V : \langle \varphi^*(v), w \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle.$$

Bemerkung: φ^* heißt der zu φ adjungierte Endomorphismus. (12 Punkte)

2. Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Bil}(\mathbb{R}^2)$ und

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

die Fundamentalmatrizen von γ_1 bzw. γ_2 bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$, die gleichzeitig Orthogonalbasis für γ_1 und γ_2 ist.

(10 Punkte)

3. Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Ein $f \in \text{End}(V)$ heißt *nilpotent*, wenn $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existiert mit $f^n = 0$. Zeigen Sie nur unter Verwendung der Definition der Selbstadjungiertheit: Ein nilpotenter Endomorphismus $f \in \text{End}(V) \setminus \{0\}$ ist nicht selbstadjungiert. (10 Punkte)

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

- *4. Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$ symmetrisch mit zwei gleichen Eigenwerten und sei $v \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ linear abhängig sind. (8 Punkte)