Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michel van Garrel

2. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 30.10.17, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 14:20 Uhr.

1. Eine Relation $R \subset M \times M$ auf einer Menge M heißt
   (1) reflexiv, wenn $\forall x \in M : (x, x) \in R$,
   (2) symmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : ((x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R)$,
   (3) transitiv, wenn $\forall x, y, z \in M : (((x, y) \in R) \wedge ((y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R)$.

   Geben Sie auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ Relationen R_1, R_2, R_3, R_4 an, für die gilt:
   (a) R_1 ist reflexiv, transitiv und nicht symmetrisch.
   (b) R_2 ist reflexiv, symmetrisch und nicht transitiv.
   (c) R_3 ist transitiv, symmetrisch und nicht reflexiv.
   (d) R_4 ist transitiv, symmetrisch und reflexiv.

   (8 Punkte)

2. Geben Sie alle Abbildungen $f : \{0, 1\} \to \{0, 1, 2\}$ durch ihre Wertetafeln an. Welche dieser Abbildungen sind injektiv, surjektiv bzw. bijektiv? *(4 Punkte)*

3. Sei M eine Menge. $\mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$ bezeichnet die Menge der Abbildungen mit Definitionsbereich M und Wertebereich $\{0, 1\}$. Für eine Teilmenge $N \subset M$ ist durch

$$\chi_N(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in N, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   die *charakteristische Abbildung* $\chi_N : M \to \{0, 1\}$ definiert. Zeigen Sie, dass

$$N \mapsto \chi_N$$

   eine Bijektion zwischen der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ und der Menge $\mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$ definiert. *(6 Punkte)*

4. Es seien die Prädikate

$$T(x, y) : x \text{ teilt } y$$
$$G(x, y) : x \leq y$$

   definiert, wobei der Definitionsbereich von x und y die Menge $\mathbb{N} - \{0\}$ ist. Finden Sie ein $d \in \mathbb{N} - \{0\}$, so dass die Aussage

$$T(d, 45) \wedge T(d, 30) \wedge \forall z\, ((T(z, 45) \wedge T(z, 30)) \to G(z, d))$$

   wahr ist. *(4 Punkte)*

(Bitte wenden.)

5. Auf der Insel Kikiwan leben Gulfs, Mokks, Pipps, Tonks und Zoffs. Betrachten wir die Verhältnisse zwischen den knuffigen Gesellen genauer:

   Man weiß, dass Gulfs, Mokks und Pipps Tonks sind. Weiterhin ist bekannt, dass Mokks sowohl Pipps als auch Tonks sind. Allerdings wurde bekannt, dass nicht alle Pipps Mokks oder Gulfs oder Zoffs sind. Völlig klar ist dagegen, dass es Mokks gibt, die weder Zoffs noch Gulfs sind.

   Immerhin sind manche Zoffs und manche Gulfs Pipps, manche Mokks auch. Außerdem verhält es sich so, dass es Zoffs gibt, die Mokks sind, manche, die Pipps sind und erstaunlicherweise auch solche, die sowohl Gulfs als auch Mokks sind.

   (a) Finden sich unter den Zoffs, die keine Tonks sind, auch Pipps?

   (b) Ist ein Gulf, der ein Mokk ist, notwendigerweise ein Pipp? Könnte es sich dabei auch um einen Zoff handeln?

   (c) Ist es möglich, dass eine Kreatur existiert, die gleichzeitig Gulf, Mokk, Pipp, Tonk und Zoff ist?

   Stellen Sie zunächst eine Tabelle auf, in der Sie alle im Text gemachten Aussagesätze prädikatenlogisch notieren, und nummerieren Sie diese mit Zahlen von 1 bis 6 durch. Verwenden Sie dabei die Prädikate $G(x)$ für “x ist Gulf”, $M(x)$ für “x ist Mokk”, usw. entsprechend den Anfangsbuchstaben. Geben Sie zur Beantwortung der Fragen an, welche Aussagen wie kombiniert werden müssen, um zur Lösung zu gelangen.

   (10 Punkte)