Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michel van Garrel

19. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 09.05.18, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

Die erste Aufgabe ist eine S-Aufgabe. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine stilistisch perfekte Lösung aufzuschreiben. Die Hälfte der Punkte wird für die Darstellung vergeben.

1.[S] Sei V ein K-Vektorraum und $\varphi \in \operatorname{End}(V)$. Seien $v_1, \ldots, v_k \in V$ Eigenvektoren von φ zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Beweisen Sie nur unter Benutzung der Definitionen: $v_1, \ldots, v_k$ sind linear unabhängig. *(6 Punkte)*

2. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, V^* sein Dualraum und sei $\varphi \in \operatorname{End}(V)$. Beweisen Sie ohne Verwendung der Determinante oder des Minimalpolynoms: $\varphi \in \operatorname{End}(V)$ und $\varphi^* \in \operatorname{End}(V^*)$ haben dieselben Eigenwerte. *(6 Punkte)*

3. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $\varphi \in \operatorname{End}(V)$ eine Projektion, das heißt $\varphi^2 = \varphi$. Sei $V = V_1 \oplus V_0$ mit $V_1 = \ker(\varphi - \mathrm{id}) = \operatorname{im}\varphi$ und $V_0 = \ker\varphi$ die Zerlegung gemäß §17.7. Sei $k = \dim V_1$, so dass $n - k = \dim V_0$.

   (a) Sei $\Psi : K^n \to V$ ein Isomorphismus und $v_1 = \Psi(e_1), \ldots, v_n = \Psi(e_n)$ die zugehörige Basis. Dann hat $\Psi^{-1} \circ \varphi \circ \Psi \in M(n, K)$ genau dann die Diagonalgestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

   wenn $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von V_1 und $(v_{k+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von V_0 ist.

   (b) Sei $\varphi \in \operatorname{End}(K^n) = M(n, K)$ gegeben durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ -14 & 1 & -7 & -7 \\ 8 & -1 & 5 & 5 \\ -14 & 1 & -7 & -7 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie ein $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Diagonalmatrix wie in (a). *(10 Punkte)*

4. (a) Seien V ein K-Vektorraum, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ und $f_1, \ldots, f_r \in K[T]$ paarweise teilerfremd mit $f(\varphi) = 0$ für $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_r$. Seien $p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_r \in K[T]$ gegeben[1] mit

$$1 = p_i f_i + q_i(f_1 \cdot \ldots \cdot \hat{f_i} \cdot \ldots \cdot f_r), \quad i = 1, \ldots, r,$$

wobei der Term $\hat{f_i}$ jeweils fortzulassen ist. Seien weiterhin

$$\Pi_i := (q_i \cdot f_1 \cdot \ldots \cdot \hat{f_i} \cdot \ldots \cdot f_r)(\varphi) \in \mathrm{End}(V).$$

Zeigen Sie, dass $\ker f_i(\varphi) = \mathrm{im}(\Pi_i)$, dass $\bigcap_i \ker \Pi_i = \{0\}$ und dass

$$\begin{aligned} \Pi_i^2 &= \Pi_i, \quad i = 1, \ldots, r, \\ \Pi_i \Pi_j &= 0, \quad \text{für } 1 \leq i \neq j \leq r, \\ \mathrm{id} &= \Pi_1 + \cdots + \Pi_r. \end{aligned} \tag{P}$$

Insbesondere sind die Π_i also miteinander kommutierende Projektionen.
Hinweis: Machen Sie sich zunächst den Fall $r = 2$ durch Anpassung des Beweises von Lemma 17.5 klar.

(b) Seien nun $\Pi_1, \ldots, \Pi_r \in \mathrm{End}(V)$ mit den Eigenschaften (P) aus (a). Zeigen Sie, dass $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ mit $V_i = \mathrm{im}(\Pi_i)$, $i = 1, \ldots, r$.

Sie haben somit Satz 17.5 alternativ bewiesen. *(10 Punkte)*

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

*5. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $1 \leq r \leq n$. Man betrachte eine Sequenz von paarweise verschiedene Unterräumen

$$\{0\} = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \cdots \subsetneq U_r = V.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) $r = n$.

(2) $\dim(U_{i+1}/U_i) = 1$ für $0 \leq i \leq r - 1$.

(3) Ist U ein Unterraum von V und $U_i \subseteq U \subseteq U_{i+1}$ für $0 \leq i \leq r - 1$, so gilt $U = U_i$ oder $U = U_{i+1}$.

(8 Punkte)

[1] Die Existenz von solchen p_i, q_i folgt aus dem Euklidischen Algorithmus.