

14. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 04.04.18, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

1. Seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $n < m$. Sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum, und seien $v_1, \dots, v_m \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in V^*$. Sei $A = (a_{ij}) \in M(m, K)$ die Matrix mit Einträgen $a_{ij} = \alpha_i(v_j)$. Zeigen Sie: $\text{rk}(A) \leq n$.
(8 Punkte)
2. Seien V, W zwei K -Vektorräume und $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:
(a) $\ker(\varphi^*) = (\text{im}(\varphi))^0$,
(b) $\ker(\varphi) = Z(\text{im}(\varphi^*))$.
(8 Punkte)
3. Seien U, U_1, U_2 Unterräume des K -Vektorraums V mit $U_1 \subseteq U_2$. Beweisen Sie, dass $(U_2 \cap U)/(U_1 \cap U)$ zu einem Unterraum von U_2/U_1 kanonisch isomorph ist.
(6 Punkte)
4. Sei $V := \mathbb{R}^3$, $u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in V$, $U := L(u) \subseteq V$. Sei e_1, e_2, e_3 die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.
(a) Zeigen Sie: (α_1, α_2) mit $\alpha_1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist eine Basis von U^0 .
(b) Zeigen Sie: $([e_1], [e_2])$ ist eine Basis von V/U .
(c) Sei (β_1, β_2) die zu $([e_1], [e_2])$ duale Basis von $(V/U)^*$. Sei $v := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \in V$.
Geben Sie $\beta_1([v])$ und $\beta_2([v])$ an.
(d) Geben Sie den kanonischen Isomorphismus $U^0 \rightarrow (V/U)^*$ explizit als Matrix bezüglich der Basen (α_1, α_2) und (β_1, β_2) an. (Siehe Lemma 12.14.)
(10 Punkte)