Christian Fleischhack Universität Hamburg

Funktionalanalysis II

Übungsblatt 11

Abgabetermin: Mittwoch, 1. Juli 2009, zur Übung

Aufgabe 48 ***(5 Punkte)***

Die Definition des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$ auf $D(q)$ durch

$$\langle x, y \rangle_q \quad \equiv \quad \langle x, y \rangle_{q,M} \quad := \quad q(x, y) + (1 - M)\langle x, y \rangle$$

für eine (nach unten) halbbeschränkte Sesquilinearform q nimmt explizit Bezug auf die untere Schranke M von q. Neben M ist jedoch auch jedes $M' \leq M$ eine untere Schranke von q. Welchen Einfluß hat also die Wahl der unteren Schranke auf die Vollständigkeit des unitären Raumes $(D(q), \langle \cdot, \cdot \rangle_{q,M'})$ sowie auf dessen Abschluß? Hat eigentlich jede halbbeschränkte Sesquilinearform eine größte untere Schranke?

Aufgabe 49 ***(5 Punkte)***

Ist die Summe zweier abgeschlossener halbbeschränkter Sesquilinearformen (mit dichten Durchschnitt der Definitionsbereiche) wieder abgeschlossen?

Aufgabe 50 ***(6 Punkte)***

Sei T symmetrisch und $D(T^2) = D(T)$.

- Ist T bzgl. T^2 relativ beschränkt? Wenn ja: Wie sieht die T^2-Schranke aus?
- Ist T^2 bzgl. T relativ beschränkt? Wenn ja: Wie sieht die T-Schranke aus?
- Ändern sich Ihre Antworten, wenn T als selbstadjungiert vorausgesetzt wird?

Aufgabe 51 ***(3 Punkte)***

Seien A und B abgeschlossene Operatoren mit $D(A) \subseteq D(B)$. Zeigen Sie, daß

$$R_\lambda(A + B) - R_\lambda(A) \quad = \quad R_\lambda(A)BR_\lambda(A + B) \quad = \quad R_\lambda(A + B)BR_\lambda(A)$$

für alle $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(A + B)$ gilt. (Zweite Resolventenformel)

Aufgabe 52 ***(5 Punkte)***

Sei A ein abgeschlossener Operator, $y \in H$ und $c \in \mathbb{C}$.
Berechnen Sie die Resolvente von $A + cB$ mit $Bx := \langle y, x \rangle y$ für alle $x \in H$.

Hinweis: Betrachten Sie den Operator $(\mathbf{1} + c\langle y, \cdot \rangle z)^{-1}$. Es reicht, die Resolvente von $A + cB$ in Abhängigkeit von $R_\lambda(A)$, c und y anzugeben.