

Funktionalanalysis II

Übungsblatt 2

Abgabetermin: Mittwoch, 22. April 2009, zur Übung

Aufgabe 6

(4 Punkte)

Sei T ein (dicht definierter) injektiver Operator auf einem Hilbertraum mit dichtem Wertebereich. Zeige, daß dann auch T^* injektiv ist und $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ gilt.

Aufgabe 7

(4 Punkte)

Welche der beiden Gleichungen

$$\ker T^* = (\text{Bild } T)^\perp \quad \text{bzw.} \quad (\ker T^*)^\perp = \text{Bild } T$$

gilt bzw. gelten für jeden dicht definierten Operator T ?

Hinweis: Wie üblich gilt es, eine Begründung für Ihre Entscheidung mitzuliefern.

Aufgabe 8

(5 Punkte)

Finden Sie ein nichttriviales Kriterium für T_1 und T_2 , so daß $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$ gilt. Begründen Sie, warum das von Ihnen gewählte Kriterium nichttrivial ist.

Hinweis: Trivial wäre ein Kriterium mit mehreren Bedingungen insbesondere dann, wenn durch Weglassen einer Bedingung immer noch ein gültiges Kriterium verbliebe. Ach ja, bevor ganz Spitzfindige kommen ... T_1 und T_2 sollten zumindest abschließbare Operatoren auf ein und demselben Hilbertraum sein.

Aufgabe 9

(6 Punkte)

Sei $Tf := if'$ der Ableitungsoperator auf $L^2[0, \infty)$ mit Definitionsbereich

$$D(T) := \{f \in L^2[0, \infty) \mid f \in AC[0, \infty), f' \in L^2[0, \infty), f(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)\}.$$

Entscheiden Sie, ob T symmetrisch bzw. selbstadjungiert ist.

Hinweis: Die Zugehörigkeit von f zu $D(T)$ impliziert die Existenz von $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.