Christian Fleischhack Universität Hamburg

Funktionalanalysis I

Übungsblatt 3

Abgabetermin: Montag, 10. November 2008, zur Übung

Aufgabe 10 *(6 Punkte)*

Sei $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig und $T : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ der zugehörige Fredholmsche Integraloperator, d. h.

$$(Tf)(s) \quad := \quad \int_0^1 K(s,t)\, f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Beweisen Sie, daß T wohldefiniert ist (also nach $C[0,1]$ abbbildet) und daß gilt

$$\|T\| \quad = \quad \sup_{s\in[0,1]} \int_0^1 |K(s,t)|\, \mathrm{d}t.$$

Aufgabe 11 *(4 Punkte)*

Seien X und Y normierte Räume. Zeigen Sie: Ist X endlichdimensional, so ist jede lineare Abbildung von X nach Y stetig.

Aufgabe 12 *(6 Punkte)*

Beweisen Sie, daß auf jedem unendlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum zwei nichtäquivalente Normen existieren.

Hinweis: Vielleicht nehmen Sie im ersten Schritt vereinfachend an, daß die Vektorraumdimension abzählbar unendlich ist.

Danke übrigens für die Frage in der Vorlesung. Ergibt doch eine nette Übungsaufgabe!

Aufgabe 13 *(4 Punkte)*

Bestimmen Sie in Abhängigkeit der komplexen Parameter a und b, ob

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad := \quad a\, \overline{x}_1 y_1 + b\, \overline{x}_2 y_2$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ ist.