Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis II

Übungsblatt 15

Die Lösungsblätter sind bis

Dienstag, 20. Juli 2010, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 und 4) bzw. Nr. 129 (Gruppen 5 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 64 *(12 Punkte)*

Berechnen Sie die beiden folgenden Integrale zum einen direkt und zum anderen mit Hilfe des Satzes von Stokes:

1. $$\int_{B_1(0)\cap(\mathbb{R}_+)^3\subseteq\mathbb{R}^3} (xy + yz + zx)\,\mathrm{d}(x, y, z)$$

2. $$\int_{\partial[-1,1]^3} (x, y^2, z^3)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}F \qquad (\vec{n}\ \ldots\ \text{äußere Normale})$$

Aufgabe 65 *(8 Punkte)*

Bestimmen Sie für jeden Punkt der Einheitssphäre S^{n-1} im $\mathbb{R}^n$ den (nach außen zeigenden) Normalenvektor; zunächst speziell für $n = 3$, dann aber für beliebige $n \geq 2$.

Hinweis: Ein Vektor $\vec{n}$ heißt Normalenvektor zur Hyperfläche $M \subseteq \mathbb{R}^n$ in x genau dann, wenn er Norm 1 hat und die Tangentialebene an M durch x senkrecht zu $\vec{n}$ ist.

Aufgabe 66 *(12 Punkte)*

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $x \in U$, und sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, d. h. $\Delta f = 0$.

1. Zeigen Sie, daß $f(x)$ gleich dem Mittelwert
$$\frac{\int_{\partial B_\varepsilon(x)} f}{\int_{\partial B_\varepsilon(x)} 1}$$
von f über jede Sphäre $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ um x ist.
2. Gilt diese Aussage noch, falls die Sphäre ∂B_ε durch die Vollkugel B_ε ersetzt wird?
3. Zeigen Sie, daß f konstant ist, sobald U zusammenhängend ist und f auf U ein lokales Extremum besitzt.

Hinweis: Die drei Teilaufgaben bauen aufeinander auf. Für den ersten Schritt betrachten Sie die wieder harmonische (warum?) Funktion $f_t(y) := f(ty)$, wobei oBdA. $x = 0$ sei. Zeigen Sie dann mit Hilfe der Greenschen Formel, daß $\frac{d}{dt}\int_{\partial B_\varepsilon} f_t = 0$ gilt.