Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis II

Übungsblatt 13

Die Lösungsblätter sind bis

Dienstag, 6. Juli 2010, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 und 4) bzw. Nr. 129 (Gruppen 5 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 55 ***(7 Punkte)***

1. Finden Sie das Minimum der Funktion $f(x_1, \ldots, x_n) := x_1 + \ldots + x_n$ unter der Nebenbedingung $x_1 \cdots x_n = 1$ (und $x_i \geq 0$).
2. Beweisen Sie damit, daß das geometrische Mittel von n positiven Zahlen stets kleiner gleich dem arithmetischen Mittel dieser Zahlen ist, und bestimmen Sie alle Fälle, in denen beide Mittel übereinstimmen.

Aufgabe 56 ***(12 Punkte)***

Bestimmen Sie (soweit existent) lokale bzw. globale Minima und Maxima der Funktionen
1. $f(x, y, z) := x^4 + y^4 + z^4$ auf der Sphäre $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
2. $f(x, y, z) := xyz$ auf der Sphäre $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
3. $f(x, y, z) := xyz$ auf der Menge $\{(x, y, z) \mid x^3 + y^3 + z^3 = 1\}$.

Aufgabe 57 ***(8 Punkte)***

Zeigen Sie, daß für $\rho \in C(\mathbb{R}^3)$ mit kompaktem (und quadrierbarem) Träger die Funktion

$$f(x) \quad := \quad -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{\|x - y\|} \, \mathrm{d}y$$

auf $\mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{supp} \rho$ glatt ist und eine Lösung der Gleichung $\Delta f = 0$ darstellt.

Hinweis: Sie benötigen nicht den Satz von Stokes; damit werden wir erst später sehen, daß sogar $\Delta f = \rho$ auf ganz $\mathbb{R}^3$ gilt, sofern $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ist.

Aufgabe 58 ***(10 Zusatzpunkte)***

Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f \equiv 0$ außerhalb irgendeiner Vollkugel.
Zeigen Sie: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine C^∞-Funktion $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

Hinweis: Konstruieren Sie eine C^∞-Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi(x) = 0$ für $\|x\| \geq 1$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$. Definieren Sie dann $f_\alpha(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \alpha y)\phi(y)\, dy$. Zeigen Sie, daß f_α glatt ist (Substitutionsregel!). Zeigen Sie, daß zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ und jedem $\alpha > 0$ ein $x' \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x' - x\| < \alpha$ und $f_\alpha(x) = f(x')$ existiert, und argumentieren dann mit gleichmäßiger Stetigkeit von f.