Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis II

Übungsblatt 12

Die Lösungsblätter sind bis

Dienstag, 29. Juni 2010, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 und 4) bzw. Nr. 129 (Gruppen 5 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 51 ***(6 Punkte)***

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge. Zeigen Sie, daß die Menge aller über M uneigentlich integrierbaren Funktionen einen Vektorraum bildet.

Aufgabe 52 ***(8 Punkte)***

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ quadrierbar und $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ bzgl. M riemannintegrierbar.
Zeigen Sie, daß dann auch $|f|$, $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ riemannintegrierbar sind.

Aufgabe 53 ***(9 Punkte)***

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine (bzgl. 0) rotationssymmetrische quadrierbare Menge, und sei $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ bzgl. M riemannintegrierbar. Zudem hänge f lediglich von der Norm des Arguments $x \in M$ ab, d. h., es existiere ein $g : \|M\| \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(\|x\|)$; hierbei gelte $\|M\| := \{\|x\|\}_{x \in M}$.
Zeigen Sie, daß

$$\int_M f \quad = \quad n \mathrm{vol}\,(B_1) \int_{\|M\|} r^{n-1} g(r)\,\mathrm{d}r\,,$$

gilt, wobei $\mathrm{vol}\,(B_1)$ das Volumen der Einheitskugel ist.

Aufgabe 54 ***(8 Zusatzpunkte)***

Berechnen Sie

$$\lim_{a \to 0+} \int_{-1}^{1} \frac{a}{a^2 + x^2}\, f(x)\,\mathrm{d}x$$

für beliebige stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Hinweis: Skizzieren Sie $x \longmapsto \frac{a}{a^2+x^2}$ für verschiedene $a > 0$.