Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis II

Übungsblatt 10

Die Lösungsblätter sind bis

Dienstag, 15. Juni 2010, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 und 4) bzw. Nr. 129 (Gruppen 5 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 41 *(8 Punkte)*

Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt:

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Aufgabe 42 *(6 Punkte)*

Finden Sie eine Funktion $f : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, für die folgendes gilt:
1. f ist über $[0,1]^2$ riemannintegrierbar;
2. $f(\cdot, y) : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ ist nicht für alle $y \in [0,1]$ riemannintegrierbar;
3. $f(x, \cdot) : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ ist nicht für alle $x \in [0,1]$ riemannintegrierbar.

Hinweis: Es ist zu beweisen, daß die von Ihnen angegebene Funktion die gewünschten Eigenschaften hat.

Aufgabe 43 *(7 Punkte)*

Seien $M \subseteq \mathbb{R}^m$ und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ quadrierbar.
Zeigen Sie, daß $M \times N \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ quadrierbar ist und $|M \times N| = |M| \cdot |N|$ gilt.

Aufgabe 44 *(6 Punkte)*

Berechnen Sie das Volumen (im Sinne des Jordaninhaltes) des n-dimensionalen Ellipsoids um 0 mit Halbachsen $a_1, \ldots, a_n > 0$ in Abhängigkeit des Volumens der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 45 *(9 Punkte)*

1. a) Ist die Cantormenge kompakt?
   b) Ist die Cantormenge abzählbar?
   c) Ist die Cantormenge quadrierbar?
   Wenn ja, wie lautet ihr Jordaninhalt?
2. Wie ändern sich Ihre Antworten, wenn Sie jeweils die α-Cantormenge mit $\alpha \in (0, \frac{1}{3})$ betrachten?

Hinweis:

1. *Konstruktion der Cantormenge C: Sei $I_0 := [0,1]$. Man definiere I_1 als I_0 ohne das offene „Mittelstück“ des Intervalls I_0, also $I_1 := I_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. I_2 wird gebildet, indem aus den beiden Teilintervallen von I_1 jeweils wieder das „Mittelstück“ entnommen wird: $I_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Induktiv ergibt sich I_{k+1} aus I_k durch Entfernen aller „Mittelstücke“. Die Cantormenge ergibt sich schließlich als Durchschnitt $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ aller Mengen I_n.*
2. *α-Cantormenge C_α: Sei $\alpha \in (0, \frac{1}{3}]$. Man starte erneut mit $[0,1]$. Nun jedoch wird das wieder symmetrisch gelegene Mittelstück jeweils so gewählt, daß es die Länge α^n hat.*