Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis II

Übungsblatt 7

Die Lösungsblätter sind bis

Dienstag, 1. Juni 2010, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 und 4) bzw. Nr. 129 (Gruppen 5 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 29 *(8 Punkte)*

Berechnen Sie

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{3}{4}}}.$$

Aufgabe 30 *(6 Punkte)*

1. Folgt für stetige Funktionen $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ aus der Existenz des uneigentlichen Integrals $\int_0^\infty f$ bereits $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?
2. Ändert sich Ihre Antwort, falls f noch als positiv vorausgesetzt wird?

Aufgabe 31 *(8 Punkte)*

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, daß das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty f$ konvergiert, $\int_{-\infty}^\infty |f|$ jedoch nicht.

Aufgabe 32 *(7 Punkte)*

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^\infty n^2 z^n \quad =: \quad f(z).$$

Geben Sie eine geschlossene Formel für f innerhalb des Konvergenzkreises an.

Hinweis: Bringen Sie $f(z)$ mit $\sum_{n=2}^\infty n(n-1)\, z^{n-2}$ und $\sum_{n=1}^\infty n\, z^{n-1}$ in Verbindung.

Aufgabe 33 *(6 Punkte)*

Sei f differenzierbar auf $[a,b]$ und $f' \leq cf$ für ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, daß $f(x) \leq f(a)\, \mathrm{e}^{c(x-a)}$ für alle $a \leq x \leq b$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie $g(x) = \mathrm{e}^{c(x-a)}$ und zeigen Sie, daß $\frac{f}{g}$ monoton fallend ist.