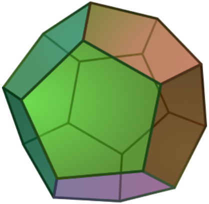
Was ist Symmetrie?

Tobias Dyckerhoff

Hausdorff Center for Mathematics
Universität Bonn

21. November 2015

Was haben



und

$$x^5 + 20x + 16 = 0$$

gemeinsam?

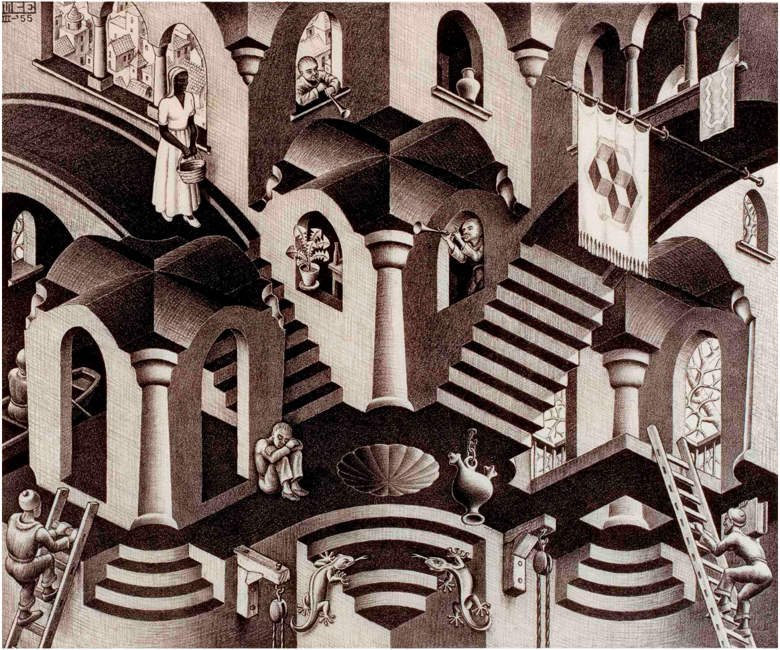
Erster Teil

Symmetrie im geometrischen Kontext

"Bin ich normal, wenn ich Symmetrie brauche?" - Von Fanny Jimenez (Die Welt)

Wes Anderson: The fantastic Mr. Fox (2009)

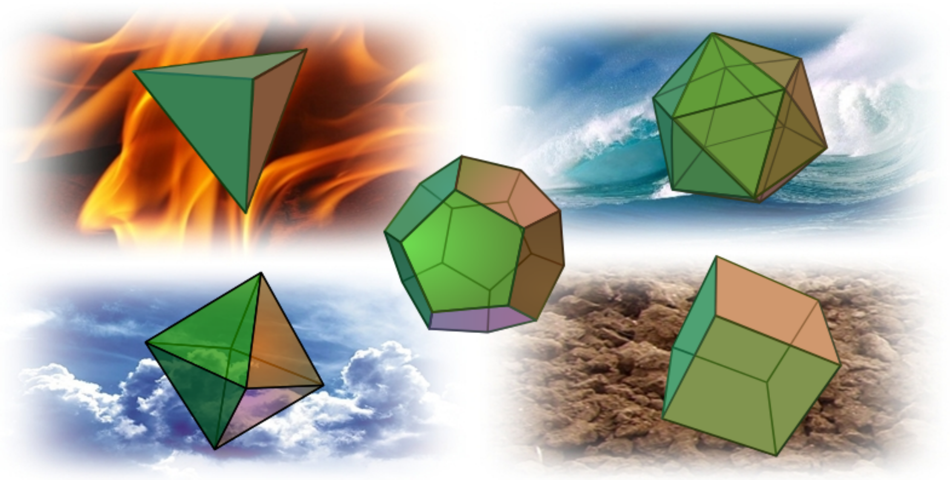
Maurits Cornelis Escher: Convex and Concave (1955)



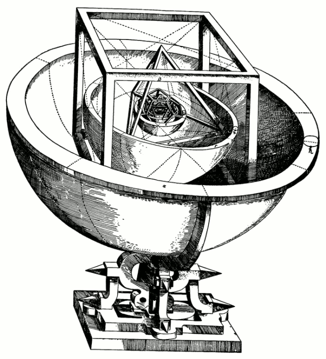
Ustad Ahmad Lahauri: Taj Mahal (1653)

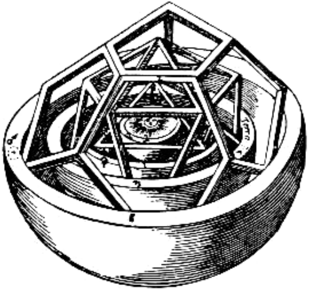
Villa Maria (Hausdorff Center for Mathematics)

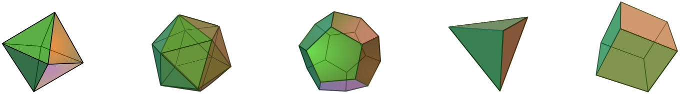
Plato: Timaeus (360 BC)

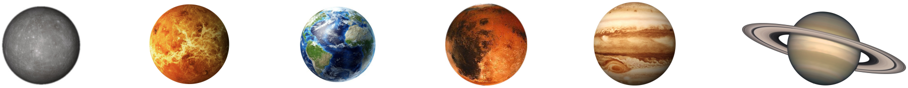


Johannes Kepler: Mysterium Cosmographicum (1596)



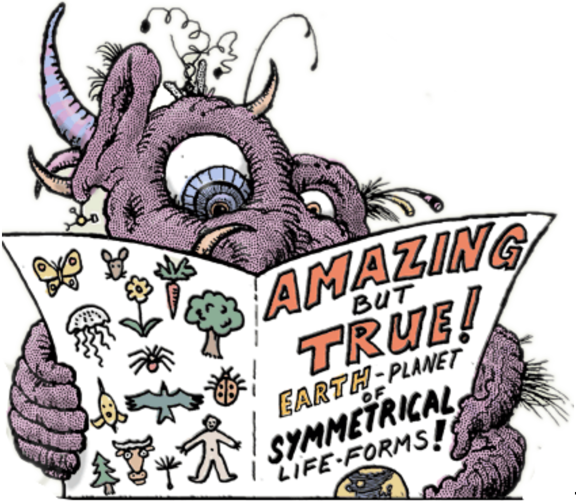






Wieso fasziniert uns Symmetrie?

Wieso fasziniert uns Symmetrie?



- Chris Madden

Was ist Symmetrie?

Eine Symmetrie einer geometrischen Figur F ist eine Abbildung von F auf sich selbst, die Abstände und Winkel erhält.

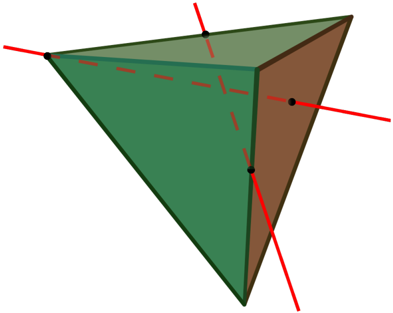
Spiegelung

Drehung

Verschiebung

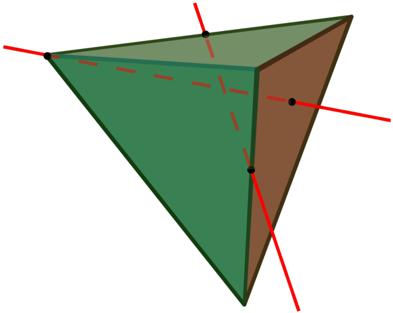
Wie kann man Symmetrie messen?

Drehsymmetrie: Tetraeder



Symmetrien:

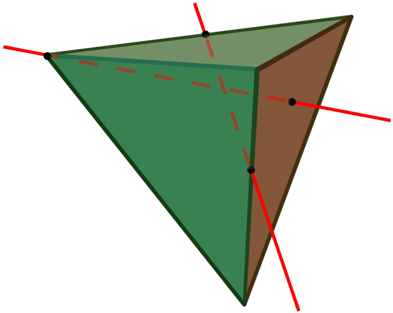
Drehsymmetrie: Tetraeder



Symmetrien:

- Identität e

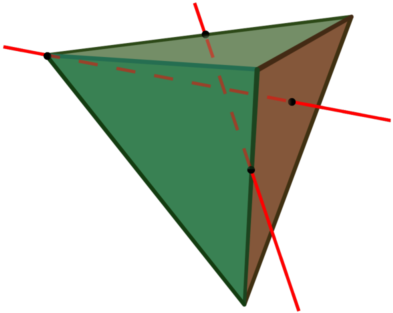
Drehsymmetrie: Tetraeder



Symmetrien:

- Identität e
- 3 Drehungen a, b, c um 180° um diagonale Achsen

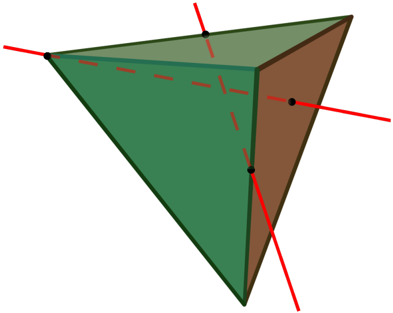
Drehsymmetrie: Tetraeder



Symmetrien:

- Identität e
- 3 Drehungen a, b, c um 180° um diagonale Achsen
- 4 Drehungen d_1, d_2, d_3, d_4 um 120° um Höhenachsen

Drehsymmetrie: Tetraeder

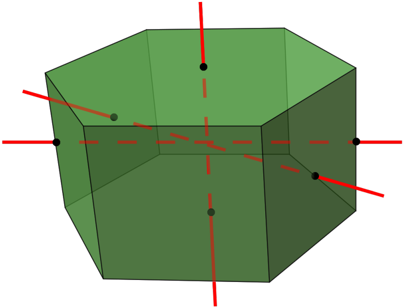


Symmetrien:

- Identität e
- 3 Drehungen a, b, c um 180° um diagonale Achsen
- 4 Drehungen d_1, d_2, d_3, d_4 um 120° um Höhenachsen
- 4 Drehungen $d_1^2, d_2^2, d_3^2, d_4^2$ um 240° um Höhenachsen

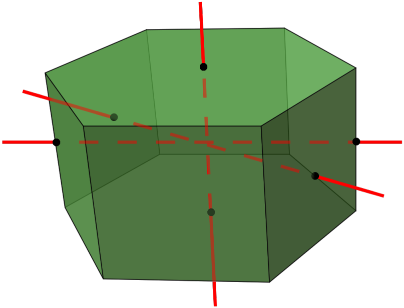
also insgesamt 12.

Drehsymmetrie: Prisma



Symmetrien:

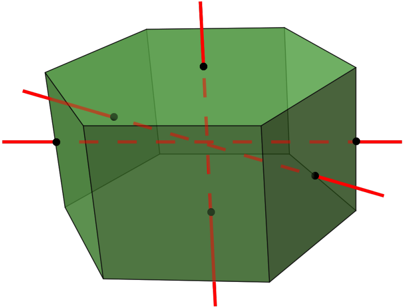
Drehsymmetrie: Prisma



Symmetrien:

- Identität e

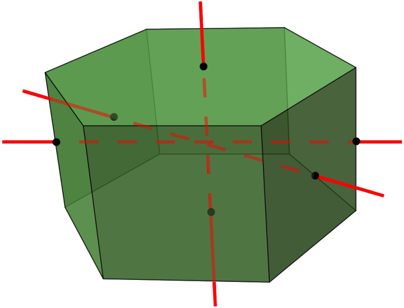
Drehsymmetrie: Prisma



Symmetrien:

- Identität e
- 5 Drehungen v, v^2, v^3, v^4, v^5 um 60°, 120°, 180°, 240°, 300° um vertikale Achse

Drehsymmetrie: Prisma

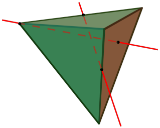


Symmetrien:

- Identität e
- 5 Drehungen v, v^2, v^3, v^4, v^5 um 60°, 120°, 180°, 240°, 300° um vertikale Achse
- 6 Drehungen $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6$ um 180° um horizontale Achsen

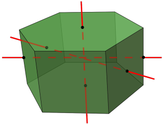
also insgesamt 12.

Multiplikationstafel: Tetraeder



$\circ$	e	a	b	c	d_1	d_1^2	d_2	d_2^2	d_3	d_3^2	d_4	d_4^2
e	e	a	b	c	d_1	d_1^2	d_2	d_2^2	d_3	d_3^2	d_4	d_4^2
a	a	e	c	b	d_4	d_3^2	d_3	d_4^2	d_2	d_1^2	d_1	d_2^2
b	b	c	e	a	d_2	d_4^2	d_1	d_3^2	d_4	d_2^2	d_3	d_1^2
c	c	b	a	e	d_3	d_2^2	d_4	d_1^2	d_1	d_4^2	d_2	d_3^2
d_1	d_1	d_3	d_4	d_2	d_1^2	e	d_3^2	b	d_4^2	c	d_2^2	a
d_1^2	d_1^2	d_4^2	d_2^2	d_3^2	e	d_1	c	d_4	a	d_2	b	d_3
d_2	d_2	d_4	d_3	d_1	d_4^2	b	d_2^2	e	d_1^2	a	d_3^2	c
d_2^2	d_2^2	d_3^2	d_1^2	d_4^2	c	d_3	e	d_2	b	d_4	a	d_1
d_3	d_3	d_1	d_2	d_4	d_2^2	c	d_4^2	a	d_3^2	e	d_1^2	b
d_3^2	d_3^2	d_2^2	d_4^2	d_1^2	a	d_4	b	d_1	e	d_3	c	d_2
d_4	d_4	d_2	d_1	d_3	d_3^2	a	d_1^2	c	d_2^2	b	d_4^2	e
d_4^2	d_4^2	d_1^2	d_3^2	d_2^2	b	d_2	a	d_3	c	d_1	e	d_4

Multiplikationstafel: Prisma



$\circ$	e	v	v^2	v^3	v^4	v^5	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
e	e	v	v^2	v^3	v^4	v^5	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
v	v	v^2	v^3	v^4	v^5	e	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_1
v^2	v^2	v^3	v^4	v^5	e	v	h_3	h_4	h_5	h_6	h_1	h_2
v^3	v^3	v^4	v^5	e	v	v^2	h_4	h_5	h_6	h_1	h_2	h_3
v^4	v^4	v^5	e	v	v^2	v^3	h_5	h_6	h_1	h_2	h_3	h_4
v^5	v^5	e	v	v^2	v^3	v^4	h_6	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
h_1	h_1	h_6	h_5	h_4	h_3	h_2	e	v^5	v^4	v^3	v^2	v
h_2	h_2	h_1	h_6	h_5	h_4	h_3	v	e	v^5	v^4	v^3	v^2
h_3	h_3	h_2	h_1	h_6	h_5	h_4	v^2	v	e	v^5	v^4	v^3
h_4	h_4	h_3	h_2	h_1	h_6	h_5	v^3	v^2	v	e	v^5	v^4
h_5	h_5	h_4	h_3	h_2	h_1	h_6	v^4	v^3	v^2	v	e	v^5
h_6	h_6	h_5	h_4	h_3	h_2	h_1	v^5	v^4	v^3	v^2	v	e

Symmetrie auf mathematisch

Definition

Eine *Gruppe* ist eine Menge G mit einem Kompositionsgesetz

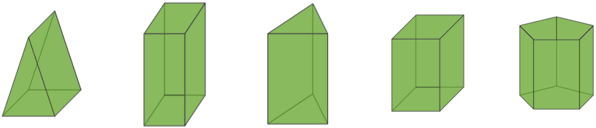
$$a, b \in G \quad \rightsquigarrow \quad a \circ b \in G$$

mit den folgenden Eigenschaften:

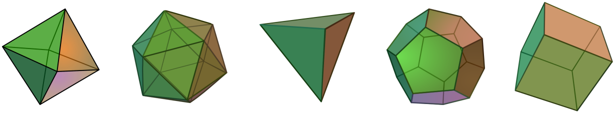
1. Es gilt
$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$
2. Es gibt ein Identitätselement $e \in G$ mit
$$a \circ e = a = e \circ a.$$
3. Jedes $a \in G$ hat ein Inverses $a^{-1} \in G$ mit
$$a \circ a^{-1} = e = a^{-1} \circ a.$$

Klassifikation der endlichen Drehgruppen

$\cdots$ $C_n\ (n \geq 3)$



$\cdots$ $D_n\ (n \geq 1)$



S_4 A_5 A_4 A_5 S_4

Zweiter Teil

Symmetrie im algebraischen Kontext

$x^2 + px + q = 0$

(I) Substitution: $x = z - \frac{p}{2}$

(II) Gleichung wird zu

$$z^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

(III) Lösungen für z sind

$$\left\{\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, -\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right\}$$

(IV) Lösungen für x sind

$$\left\{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right\}$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Niccolò Tartaglia

(1500 – 1557)

Ehre sei Gott, 1534, dem 22. Februar, in Venedig. Diese sind die dreißig Aufgaben vorgeschlagen von mir, Antonio Maria Fior, an Sie, Herrn Niccolò Tartaglia:

1. Finde eine Zahl, die mit ihrer dritten Wurzel addiert sechs ergibt, 6.
2. Finde zwei Zahlen in doppeltem Verhältnis, so dass wenn das Quadrat der grösseren mit der kleineren multipliziert und dieses Produkt zu den ursprünglichen Zahlen addiert wird, das Ergebnis vierzig ist, 40.
3. ...

Ehre sei Gott, 1534, dem 22. Februar, in Venedig. Diese sind die dreißig Aufgaben vorgeschlagen von mir, Antonio Maria Fior, an Sie, Herrn Niccolò Tartaglia:

1. Finde eine Zahl, die mit ihrer dritten Wurzel addiert sechs ergibt, 6. $\rightsquigarrow$ $x^3 + x = 6$
2. Finde zwei Zahlen in doppeltem Verhältnis, so dass wenn das Quadrat der grösseren mit der kleineren multipliziert und dieses Produkt zu den ursprünglichen Zahlen addiert wird, das Ergebnis vierzig ist, 40.
3. ...

Ehre sei Gott, 1534, dem 22. Februar, in Venedig. Diese sind die dreißig Aufgaben vorgeschlagen von mir, Antonio Maria Fior, an Sie, Herrn Niccolò Tartaglia:

1. Finde eine Zahl, die mit ihrer dritten Wurzel addiert sechs ergibt, 6. $\rightsquigarrow$ $x^3 + x = 6$
2. Finde zwei Zahlen in doppeltem Verhältnis, so dass wenn das Quadrat der grösseren mit der kleineren multipliziert und dieses Produkt zu den ursprünglichen Zahlen addiert wird, das Ergebnis vierzig ist, 40. $\rightsquigarrow$ $4x^3 + 3x = 40$
3. ...

Tartaglias Formel (1535):

Wenn der Kubus und die Dinge zusammen
Gleich einer diskreten Zahl sind,
Finde zwei Zahlen mit dieser als Differenz.
Dann mache es zur Gewohnheit
Dass deren Produkt immer soll gleich sein
Genau zum Kubus einem Drittel der Dinge.
Der Rest, als allgemeine Regel,
Der Subtraktion deren Kubikwurzeln
Ist gleich Deiner Unbekannten.

Tartaglias Formel (1535):

Wenn der Kubus und die Dinge zusammen
Gleich einer diskreten Zahl sind,

$$\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\end{matrix}}\right\} x^3 + px = q$$

Finde zwei Zahlen mit dieser als Differenz.
Dann mache es zur Gewohnheit
Dass deren Produkt immer soll gleich sein
Genau zum Kubus einem Drittel der Dinge.
Der Rest, als allgemeine Regel,
Der Subtraktion deren Kubikwurzeln
Ist gleich Deiner Unbekannten.

Tartaglias Formel (1535):

Wenn der Kubus und die Dinge zusammen
Gleich einer diskreten Zahl sind,

$$x^3 + px = q$$

Finde zwei Zahlen mit dieser als Differenz.

$$u - v = q$$

Dann mache es zur Gewohnheit
Dass deren Produkt immer soll gleich sein
Genau zum Kubus einem Drittel der Dinge.
Der Rest, als allgemeine Regel,
Der Subtraktion deren Kubikwurzeln
Ist gleich Deiner Unbekannten.

Tartaglias Formel (1535):

Wenn der Kubus und die Dinge zusammen
Gleich einer diskreten Zahl sind,

$$\left.\right\} x^3 + px = q$$

Finde zwei Zahlen mit dieser als Differenz.

$$\left.\right\} u - v = q$$

Dann mache es zur Gewohnheit
Dass deren Produkt immer soll gleich sein
Genau zum Kubus einem Drittel der Dinge.

$$\left.\right\} uv = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Der Rest, als allgemeine Regel,
Der Subtraktion deren Kubikwurzeln
Ist gleich Deiner Unbekannten.

Tartaglias Formel (1535):

Wenn der Kubus und die Dinge zusammen
Gleich einer diskreten Zahl sind,

$$x^3 + px = q$$

Finde zwei Zahlen mit dieser als Differenz.

$$u - v = q$$

Dann mache es zur Gewohnheit
Dass deren Produkt immer soll gleich sein
Genau zum Kubus einem Drittel der Dinge.

$$uv = \left(\tfrac{p}{3}\right)^3$$

Der Rest, als allgemeine Regel,
Der Subtraktion deren Kubikwurzeln
Ist gleich Deiner Unbekannten.

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$$

Tartaglias Formel (1535):

Wenn der Kubus und die Dinge zusammen
Gleich einer diskreten Zahl sind,

$$x^3 + px = q$$

Finde zwei Zahlen mit dieser als Differenz.

$$u - v = q$$

Dann mache es zur Gewohnheit
Dass deren Produkt immer soll gleich sein
Genau zum Kubus einem Drittel der Dinge.

$$uv = \left(\tfrac{p}{3}\right)^3$$

Der Rest, als allgemeine Regel,
Der Subtraktion deren Kubikwurzeln
Ist gleich Deiner Unbekannten.

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$$

$$\rightsquigarrow\ x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Cardano und Ferrari (Ars magna 1545):

$$
\begin{aligned}
x \;=\; & \frac{-a}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}}\left(b^2-3ac+12d\right)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}} \\
& \overline{\quad + \left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}} \\
& - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{4b}{3} - \frac{2^{\frac{1}{3}}\left(b^2-3ac+12d\right)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}} \\
& \overline{\quad - \left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}} \\
& \overline{- \frac{-a^3+4ab-8c}{4\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}}}
\end{aligned}
$$

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Evariste Galois

(1811 – 1832)

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Wie symmetrisch ist diese Gleichung?

Symmetrie von polynomialen Gleichungen

Jede polynomiale Gleichung

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \qquad (\star)$$

mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ hat Lösungen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

in $\mathbb{C}$, so dass

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Eine Symmetrie der Gleichung $(\star)$ ist eine Vertauschung der Lösungen die alle polynomialen Relationen zwischen $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ erhält.

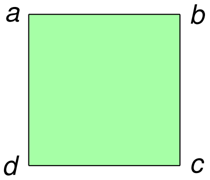
Beispiel: $x^4 - 2 = 0$

- Lösungen: $a = \sqrt[4]{2}$, $b = i\sqrt[4]{2}$, $c = -\sqrt[4]{2}$, $d = -i\sqrt[4]{2}$.
- Polynomiale Relationen:
  - Wegen $x^4 - 2 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} abcd &= -2 \\ abc + abd + acd + bcd &= 0 \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd &= 0 \\ a + b + c + d &= 0. \end{aligned}$$

  - Zusätzlich gelten

$$\begin{aligned} a^2b^2 &= -2 & & \\ b^2c^2 &= -2 & a^2c^2 &= 2 \\ c^2d^2 &= -2 & b^2d^2 &= 2 \\ d^2a^2 &= -2. & & \end{aligned}$$



- Symmetriegruppe = D_4

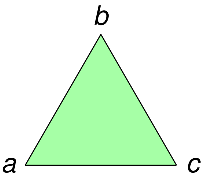
Beispiel: $x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$

- Lösungen: $a = 2\cos(\frac{2\pi}{7})$, $b = 2\cos(\frac{4\pi}{7})$, $c = 2\cos(\frac{6\pi}{7})$.
- Polynomiale Relationen:
  - Wegen $x^3 + x^2 - 2x + 1 = (x-a)(x-b)(x-c)$ gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} abc &= -1 \\ ab + ac + bc &= -2 \\ a + b + c &= -1. \end{aligned}$$

  - Zusätzlich gelten

$$\begin{aligned} b &= a^2 - 2 \\ c &= b^2 - 2 \\ a &= c^2 - 2. \end{aligned}$$



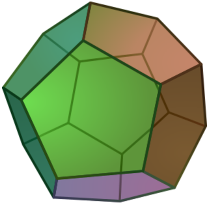
- Symmetriegruppe = C_3

Galois' fundamentale Einsicht:

Komplexität einer Gleichung	$\Longleftrightarrow$	Komplexität ihrer Symmetriegruppe

Wenn die Symmetriegruppe “zu kompliziert” ist, dann können die Lösungen **nicht** durch eine explizite Formel beschrieben werden.

Was haben



und

$$x^5 + 20x + 16 = 0$$

gemeinsam?

Die Symmetriegruppe A_5.

Dies ist die kleinste Gruppe die “zu kompliziert” ist. Deshalb hat die Gleichung

$$x^5 + 20x + 16 = 0$$

keine explizite Lösungsformel, die nur die vier Grundrechenarten und Wurzeln einbezieht.

Danke!