

# Mit Euler zur Alhambra: Symmetrie in der Ebene

Tobias Dyckerhoff \*

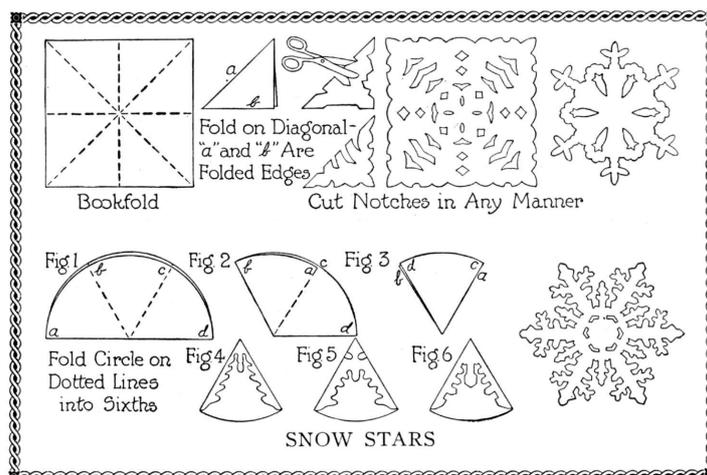
31. August 2016

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Symmetrie in der Ebene</b>	<b>2</b>
1.1	Bewegungen . . . . .	2
1.2	Der Symmetriecode . . . . .	4
1.3	Jede Symmetrie hat ihren Preis . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Euler-Charakteristik</b>	<b>8</b>
2.1	Flächen . . . . .	8
2.2	Orbflächen . . . . .	10
2.3	Hauptsatz . . . . .	12

## Einleitung

In diesen Notizen geht es um Symmetrie in der Ebene. Etwas vereinfacht ausgedrückt werden wir Symmetrie mit einer Methode untersuchen, die jedem von klein auf vertraut ist:



\*dyckerho@math.uni-bonn.de

Die Mathematik, die hinter einer systematischen Studie dieser “Falt-Methode” steckt, ist relativ modern und es ist einigermaßen aufwendig sie formal zu beschreiben. Das Ziel dieser Vortragsreihe ist, einen elementaren Einblick in einige Aspekte dieser Theorie zu geben, ohne in die technischen Details zu gehen. Als Leitfaden gilt eine konkrete Fragestellung: die Klassifizierung der Symmetrien von Tapetenmustern wie man sie zum Beispiel in der Alhambra in Spanien finden kann:



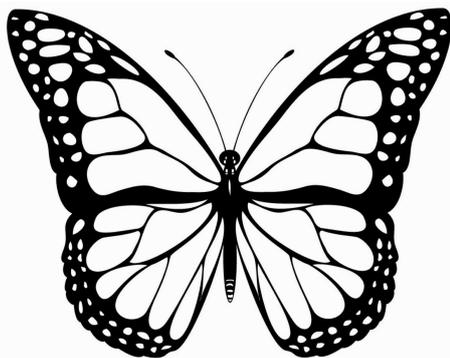
Zum größten Teil stammt das Material wie auch die Idee für diesen Kurs aus den Referenzen [1, 2], die ich als weiterführende Lektüre empfehle.

## 1 Symmetrie in der Ebene

### 1.1 Bewegungen

Jeder hat eine natürliche Intuition dafür, was es für ein gegebenes Objekt bedeutet, *symmetrisch zu sein*.

Schmetterling



Mandala



Unsere Intuition sagt uns auch, dass das Mandala ein größeres Maß an Symmetrie hat als der Schmetterling.

**Frage 1.1.** Kann man Symmetrie “messen”?

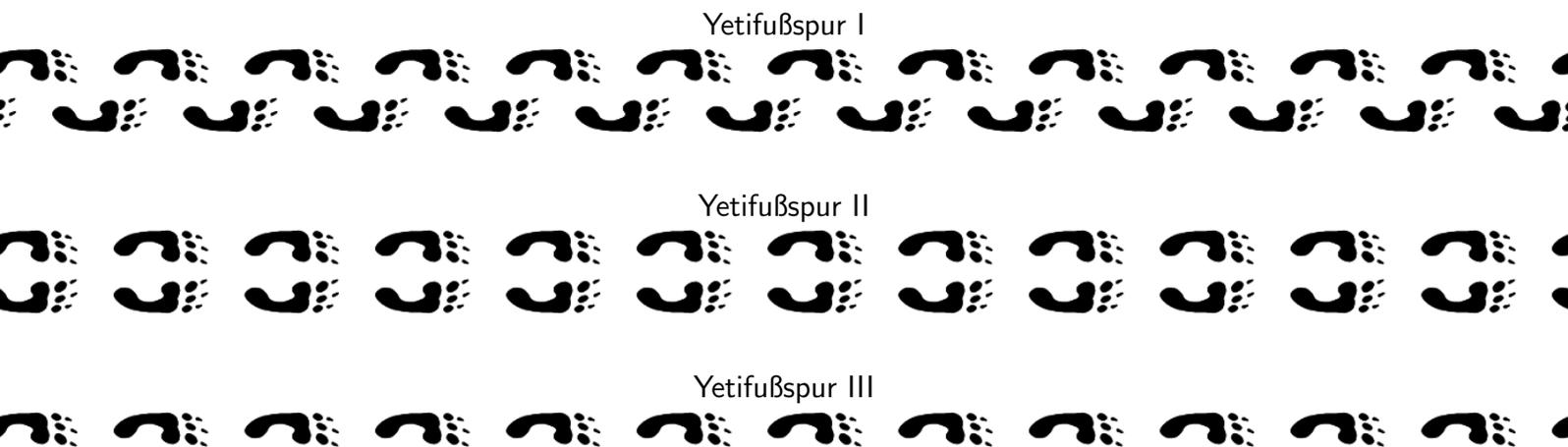
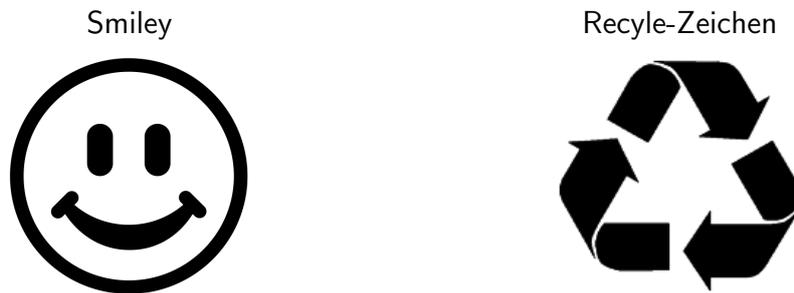
**Definition 1.2.** Eine *Symmetrie* einer geometrischen Figur  $T$  in der Ebene ist eine *Bewegung* die  $T$  auf sich selbst abbildet. Unter einer Bewegung verstehen wir hier:

- (1) Spiegelung an einer Achse,

- (2) Drehung um einen Punkt,
- (3) Verschiebung,
- (4) Gleitspiegelung: Spiegelung gefolgt von einer Verschiebung entlang der Spiegelachse.

**Bemerkung 1.3.** Unsere Definition von Bewegung ist etwas willkürlich, man kann aber zeigen, dass Bewegungen genau die abstandserhaltenden Selbstabbildungen der Ebene sind. Insbesondere ist die Hintereinanderausführung von Bewegungen wieder eine Bewegung! Dies ist nicht direkt aus unserer Definition erkennbar.

Die folgenden Figure illustrieren die fundamentalen Beispiele von Symmetrien in der Ebene:



Wir können nun unsere Definition von “Symmetrie” verwenden, um zu messen wie symmetrisch eine Figur  $T$  ist: wir zählen einfach wie viele Symmetrien die Figur hat und nennen das Resultat die *Symmetriezahl von  $T$* . Hierbei sind Mathematiker (aus gutem Grunde) pedantisch und zählen auch die Identitätsbewegung mit, somit hat jede Figur mindestens eine Symmetrie.

Figur	Symmetriezahl
Schmetterling	2
Smiley	2
Recycle-Zeichen	3
Mandala	16
Yetifußspuren	$\infty$

Die Symmetriezahl einer geometrischen Figur gibt uns ein nützliches Maß für die Symmetrie einer gegebenen geometrischen Figur. Ihre Nützlichkeit hat allerdings ihre Grenzen: Zum Beispiel haben alle Yetifußspuren eine unendliche Symmetriezahl. Trotzdem würde man doch zum Beispiel sagen wollen, dass Fußspur II mehr Symmetrie aufweist als Fußspur III.

Auch die beiden Mandalas

Mandala I



Mandala II



haben die gleiche Symmetriezahl 8. Allerdings sind alle Symmetrien des Mandala I durch Drehungen gegeben, während das Mandala II auch Spiegelungssymmetrien besitzt.

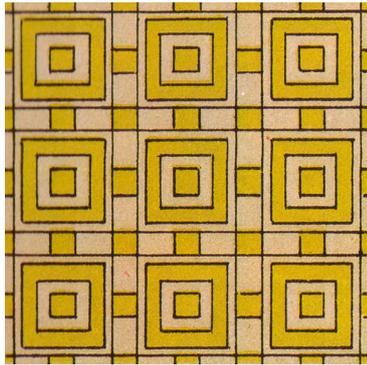
**Frage 1.4.** Die Symmetriezahl ist schön und gut. Aber gibt es vielleicht eine präzisere Methode, Symmetrie zu messen?

Aus der obigen Kritik der Symmetriezahl geht hervor, dass wir beim Zählen der Symmetrien vielleicht die unterschiedlichen Typen von Symmetrien unterscheiden sollten: zum Beispiel könnten wir zwischen Drehungen und Spiegelungen unterscheiden. Im nächsten Abschnitt führen wir *Symmetriecodes* ein, die im wesentlichen auf dieser Idee aufbauen.

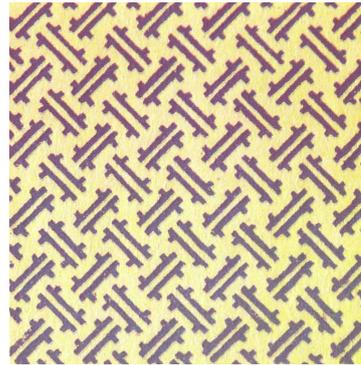
## 1.2 Der Symmetriecode

Wir beschränken unsere Interesse jetzt auf eine bestimmte Klasse von symmetrischen Figuren in der Ebene: nämlich solche deren Verschiebungssymmetrien durch zwei Verschiebungen in unabhängige Richtungen erzeugt sind. Figuren, die diese Art von Symmetrie aufweisen heißen *Tapetenmuster*. Ein paar Beispiele:

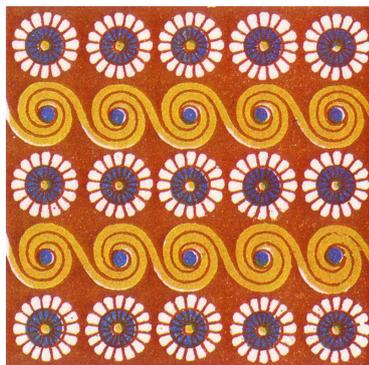
Muster I



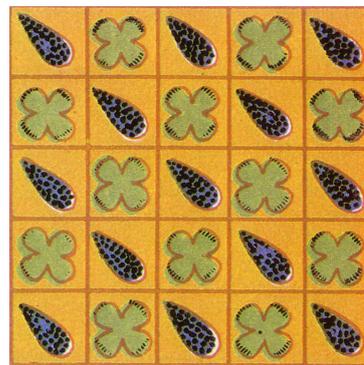
Muster II



Muster III



Muster IV



Ein *Symmetriecode* ist eine Folge von Zeichen aus der Menge  $\{*, \times, \circ, 2, 3, 4, \dots\}$ , die sich von links nach rechts wie folgt zusammensetzt:

- eine Folge von Zahlen (genannt *Drehzahlen*)
- eine Folge des Zeichens  $*$
- eine Folge von Zahlen (genannt *Spiegelzahlen*)
- eine Folge des Zeichens  $\times$
- eine Folge des Zeichens  $\circ$

Wir ordnen nun einem gegebenen Tapetenmuster  $T$  einen Symmetriecode zu. Dazu verwenden wir die folgende begriffliche Konvention: Zwei Punkte in der Ebene heißen *unabhängig*, wenn es keine Symmetrie von  $T$  gibt, die den einen auf den anderen Punkt abbildet. Genauso heißen zwei Geraden unabhängig, wenn es keine Symmetrie gibt, die die eine auf die andere Gerade abbildet.

- (1) Zunächst suchen wir nach Punkten um die  $T$  Drehsymmetrie hat. Hier gibt es zwei verschiedene Typen:
  - *Zyklischer Punkt*: Ein Punkt um den es Drehsymmetrie gibt, durch den aber keine Spiegelachse verläuft. Falls es einen zyklischen Punkt gibt, dann notieren wir die Anzahl  $N$  der Drehsymmetrien (*Drehzahlen*) um diesen Punkt. Für jeden weiteren zyklischen Punkt, der unabhängig von den schon gefundenen

ist, notieren wir die Drehzahl. Wenn es also  $k$  paarweise unabhängige zyklische Punkte gibt, dann ist das soweit entstandene Codewort eine Folge von natürlichen Zahlen

$$N_1 N_2 \cdots N_k$$

in willkürlicher Reihenfolge.

- *Diedrischer Punkt*: Ein Punkt an dem sich mindestens zwei Spiegelachsen schneiden. Falls es einen diedrischen Punkt gibt, dann notieren wir die Anzahl  $M$  der sich schneidenden Spiegelachsen (*Spiegelzahlen*) und schreiben den Code  $*M$  rechts neben den schon entstandenen Code. Falls es mehrere diedrische Punkte gibt, dann zeigt eine leichte Überlegung, dass die Gesamtheit der Spiegelachsen von  $T$  die Ebene in kongruente Gebiete zerlegt, so dass die diedrischen Punkte genau die Eckpunkte dieser Gebiete sind. Wir wählen ein solches Gebiet  $G$ , so dass der schon betrachtete diedrische Punkt ein Eckpunkt ist. Dann laufen wir in beliebiger Richtung am Rand des Gebietes  $G$  entlang und notieren die Spiegelzahlen derjenigen auftretenden Eckpunkte, die unabhängig zu schon notierten diedrischen Punkten sind. Der resultierende Code hat nun die Form

$$N_1 N_2 \cdots N_k * M_1 \cdots M_p$$

falls der Rand von  $G$  genau  $p$  paarweise unabhängige Eckpunkte hat.

- (2) Falls  $T$  keine diedrischen Punkte hat, könnte es Spiegelsymmetrie um parallele Spiegelachsen geben. In diesem Falle notieren wir, rechts neben dem Code für eventuelle zyklische Punkte, für jede unabhängige Spiegelachse das Symbol  $*$ .
- (3) Falls es Gleitspiegelungen gibt, deren zugehörige Symmetrieachse keine Spiegelachse schneidet, dann fügen wir für jede unabhängige Symmetrieachse das Symbol  $\times$  rechts an den Code an.
- (4) Falls die Figur keine der obigen Symmetrien besitzt und somit lediglich die für Tapetenmuster vorausgesetzten Verschiebungssymmetrien besitzt, dann hat diese Figur den Code  $\circ$ .

**Beispiel 1.5.** Die obigen Tapetenmuster haben folgende Symmetriecodes:

Muster	Symmetriecode
I	*442
II	4*2
III	2222
IV	**

### 1.3 Jede Symmetrie hat ihren Preis

Wir ordnen nun jedem Symmetriecode einen Preis zu, der sich anhand folgender Tabelle berechnet:

Symbol	Preis in €
*	1
N	$\frac{N-1}{N}$
M	$\frac{M-1}{2M}$
×	1
o	2

Das mag an dieser Stelle etwas willkürlich erscheinen, die Logik hinter dieser Preistabelle wird sich am Ende dieses Kurses erschließen.

**Beispiel 1.6.** Alle Symmetriecodes aus Beispiel 1.5 kosten 2€.

Diese Rechnung ist kein Zufall:

**Satz 1.7.** Jeder Symmetriecode eines Tapetenmusters kostet 2€.

Das Verständnis des Beweises von Satz 1.7 und insbesondere der Methodik, die in den Beweis eingeht, bildet das Hauptziel dieser Vortragsreihe. Zunächst betrachten wir eine interessante Anwendung:

**Satz 1.8.** Die Liste der Symmetriecodes mit Preis 2€ besteht genau aus den folgenden Codes:

2222 632 442 333 \*2222 \*632 \*442 \*333  
 2\*22 22\* 4\*2 3\*3 \*\* \*× ×× 22× o

Insbesondere gibt es, unter Verwendung von Satz 1.7, höchstens 17 verschiedene Symmetriotypen von Tapetenmustern.

*Beweis.* Nehmen wir zunächst an, dass der Symmetriecode nur Drehzahlen enthält. Die Preise  $d$  für Drehzahlen erfüllen  $\frac{1}{2} \leq d < 1$ , so dass der Code entweder drei oder vier Stellen hat. Falls er vier Stellen hat, dann muss er

2222

lauten. Direktes Nachrechnen zeigt, dass die Codes mit drei Stellen

632, 442, 333

sind. Ein Code der Form  $*M_1M_2 \dots M_k$  kostet 2€ genau dann wenn der Code  $M_1M_2 \dots M_k$  (die  $M_i$  sind jetzt Drehzahlen) 2€ kostet. Somit sind die Codes dieser Form genau

\*2222, \*632, \*442, \*333.

Wenn ein Code die Folge  $N * M$  enthält so ändert sich sein Preis nicht, wenn wir diese Folge durch  $*NNM$  ersetzen. Die Codes der Form  $N_1 \dots N_k * M_1 \dots M_l$  für 2€ lauten demnach

2\*22, 22\*, 4\*2, 3\*3.

Der einzige 2€-Code mit zwei Symbolen \* ist

\*\*.

Falls es ein Symbol  $\times$  in einem Code gibt, dann können wir es durch \* ersetzen ohne, dass sich der Preis ändert. Demnach sind

$*\times, \times\times, 22\times$

alle Codes, die ein  $\times$  enthalten. Zuletzt muss ein Code der  $\circ$  enthält natürlich schon

$\circ$

sein. □

**Aufgabe 1.9.** Zeige, dass die Tapetenmuster auf Seiten 1 und 2 des Appendix alle Symmetriecodes mit Preis 2€ ausschöpfen. Folgere, dass es genau 17 verschiedene Symmetrietypen von Tapetenmustern gibt.

**Aufgabe 1.10.** Bestimme auch die Symmetriecodes aller anderen Tapetenmuster im Appendix. Für den Rest des Tages: Halte Ausschau nach weiteren Tapetenmustern auf Böden, Wänden, etc, fotografiere sie, und bestimme die zugehörigen Symmetriecodes.

## 2 Euler-Charakteristik

### 2.1 Flächen

Wir betrachten zunächst Flächen ohne Rand, also zum Beispiel die Ebene, eine Sphäre, ein Torus, etc. Eine *Landkarte* auf einer Fläche  $F$  besteht aus einer Menge von Punkten, und einer Menge von Kurven die zwischen den Punkten verlaufen. Hier setzen wir voraus, dass sich die Kurven nicht schneiden und sich lediglich in den vorgegebenen Punkten an ihren Enden berühren. Die Punkte einer Karte heißen *Vertizes*, die verbindenden Kurven heißen *Grenzen*, und die übrigen Gebiete auf der Fläche heißen *Länder*. Ein Land heißt *einfach*, wenn es sich zu einer Kreisscheibe deformieren läßt. Eine Landkarte heißt *einfach*, wenn jedes Land einfach ist.

**Beispiel 2.1.** Wir betrachten die Ebene. Wir wählen einen beliebigen Punkt als Vertex und fügen eine Grenze hinzu, die einen Kreis bildet, der den Vertex mit sich selbst verbindet. Dies ergibt eine Landkarte, welche die Ebene in zwei Länder aufteilt. Das Land im Inneren des Kreises ist einfach. Das Land außerhalb des Kreises ist *nicht* einfach und somit ist die Landkarte auch nicht einfach. Wenn wir allerdings die analoge Landkarte auf einer Sphäre betrachten, so teilt die Grenze die Sphäre in zwei Länder auf, die beide einfach sind. Insbesondere ist die Landkarte selbst also einfach.

Wenn eine einfache Landkarte endlich viele Vertizes, Grenzen, und Länder hat, dann definieren wir ihre *Euler-Charakteristik* als

$$|\{\text{Vertizes}\}| - |\{\text{Grenzen}\}| + |\{\text{Länder}\}|.$$

**Satz 2.2.** Sei  $F$  eine Fläche. Dann hat jede endliche einfache Landkarte die gleiche Euler-Charakteristik.

*Beweis.* Seien zwei endliche einfache Landkarten gegeben. Dann bilden wir die Vereinigung aller Vertizes und Grenzen, und fügen, wenn nötig, neue Vertizes an den Schnittpunkten der Grenzen ein. Wir erhalten eine neue endliche einfache Landkarte, die eine gemeinsame *Verfeinerung* beider ursprünglichen Landkarten bildet. Es genügt also zu zeigen, dass sich die Euler-Charakteristik einer endlichen einfachen Landkarte nicht unter Verfeinerung ändert. Jede Verfeinerung ist durch mehrfache Anwendung der folgenden Operationen gegeben:

- (1) Einfügen eines Vertizes auf einer Grenze: Hierbei erhöht sich die Anzahl der Vertizes und die Anzahl der Grenzen jeweils um 1, so dass sich die Euler-Charakteristik nicht ändert.
- (2) Einfügen eines Vertizes im Inneren eines Landes. Dann muss jedoch gleichzeitig eine Grenze eingeführt werden, die diesen Vertex zu einem anderen Vertex an einer Grenze des Ursprünglichen Landes verbindet (sonst wäre die erhaltene Landkarte nicht mehr einfach). Hierbei erhöht sich wieder sowohl die Anzahl der Vertizes als auch die Anzahl der Grenzen um 1. Die Euler-Charakteristik bleibt also gleich.
- (3) Einfügen einer neuen Grenze, die zwei Vertizes am Rand eines Landes verbindet. Hierbei erhöht sich die Anzahl der Grenzen, aber auch die Anzahl der Länder jeweils um 1, so dass sich die Euler-Charakteristik wieder nicht ändert.

□

Für jede Fläche  $F$ , die eine endliche einfache Landkarte besitzt, können wir also die *Euler-Charakteristik von  $F$*  definieren als

$$\chi(F) = \text{Euler-Charakteristik einer endlichen einfachen Landkarte auf } F.$$

**Beispiel 2.3.** Betrachten wir eine Sphäre. Wir wählen einen Vertex auf dem Äquator, und den Äquator selbst als Grenze. Dann zerlegt diese Grenze die Sphäre in zwei einfache Länder. Die Euler-Charakteristik der Sphäre ist also

$$1 - 1 + 2 = 2.$$

Es gibt sogar eine noch gröbere einfache Landkarte, welche einfach nur aus einem Vertex besteht und keine Grenzen hat. Der Rest der Sphäre bildet eine Scheibe, so dass die Landkarte einfach ist. Die Euler-Charakteristik berechnet sich zu

$$1 + 1 = 2$$

im Einklang mit Satz 2.2.

**Aufgabe 2.4.** (1) Berechne die Euler-Charakteristik der folgenden Flächen:

- Torus.
- Oberfläche einer Kaffeetasse.

- Oberfläche einer Teekanne ohne Deckel.
  - Oberfläche einer Brezel.
  - Oberfläche eines beliebigen Objektes was diesbezüglich interessant erscheint.
- (2) Wie ändert sich die Euler-Charakteristik einer Fläche, wenn man die Oberfläche eines Henkels anklebt? Genauer gesagt klebt man den Henkel wie folgt an: wir entfernen aus der gegebenen Fläche und aus einem Torus jeweils eine kleine Scheibe, so dass auf beide Flächen ein kreisförmiger Rand entsteht. Jetzt kleben wir die beiden Ränder zusammen.
- (3) Berechne die Euler-Charakteristik einer Sphäre mit  $g$  angeklebten Henkeln.

Wir pausieren an dieser Stelle um festzustellen: Die Sphäre hat Euler-Charakteristik 2 und jedes Tapetenmuster kostet 2€. Besteht ein Zusammenhang? – Der besteht in der Tat und die etwas willkürlich erscheinende Preisliste für Symmetriecodes beruht darauf.

## 2.2 Orbiflächen

Der Schlüssel für dieses Verständnis basiert auf der Faltmethode die wir bereits in der Einleitung erwähnt haben: Für eine gegebene ebene Figur  $T$ , bilden wir eine „Falt-Fläche“  $F_T$ , indem wir alle Punkte in der Ebene identifizieren, die durch eine Symmetrie von  $T$  ineinander übergeführt werden können. Was bei diesem Prozess entsteht schauen wir uns am besten in ein paar Beispielen an:

**Beispiel 2.5.** Betrachten wir das Mandala I als ebene Figur  $T$ , dann bildet die Falt-Fläche  $F_T$  eine Kegel-Fläche wobei der zyklische Punkt am Ursprung zur Spitze des Kegels wird. Für Mandala II erhalten wir einen Sektor mit zwei Kanten, die sich an einem Eckpunkt treffen, welcher zum diedrischen Punkt des Mandalas korrespondiert. Nehmen wir ein Tapetenmuster  $T$  mit Symmetriecode  $\circ$ . Dann ist  $F_T$  ein Torus.

Wie wir an den Beispielen erkennen können, gibt es eine Korrespondenz zwischen geometrischen Merkmalen der Fläche  $F_T$  und Besonderheiten der Symmetrie von  $T$ :

Symmetrie von $T$	Geometrie von $F_T$
Spiegelachse	Kante
diedrischer Punkt	Ecke
zyklischer Punkt	Spitze

Wir stellen auch fest, dass die Eckpunkte (bzw. Spitzen) der Fläche  $F_T$ , per Konstruktion, zu den unabhängigen diedrischen (bzw. zyklischen) Punkten in der Ebene korrespondieren. Die Drehzahlen und Spiegelzahlen im Symmetriecode von  $T$  liefern also genau eine Zahl für jede Ecke und Spitze.

**Definition 2.6.** Eine *Orbifläche*  $\mathbb{F}$  ist eine Fläche mit Kanten, Ecken, und Spitzen, wobei jede Ecke und Spitze mit einer natürlichen Zahl  $\geq 2$ , genannt *Orbizahl*, versehen ist.

**Beispiel 2.7.** Jede gewöhnliche Fläche ohne Rand, also zum Beispiel die Ebene, eine Sphäre, oder ein Torus, definiert eine Orbifläche ohne Kanten, Ecken, und Spitzen.

**Beispiel 2.8.** Für jede ebene Figur  $T$  bildet die Faltfläche eine Orbifläche  $\mathbb{F}_T$ : Jede Ecke korrespondiert zu einem diedrischen Punkt in der Ebene. Die Orbizahl der Ecke ist die zugehörigen Spiegelzahl. Jede Spitze kommt von einem zyklischen Punkt und wir wählen die Drehzahl als Orbizahl.

**Aufgabe 2.9.** Erstelle eine Liste der Orbiflächen, die durch das Falten von Tapetenmustern entstehen.

Die Schlüsselidee ist jetzt die Euler-Charakteristik einer Orbifläche einzuführen. Eine Landkarte auf einer Orbifläche ist definiert wie für eine Fläche, wobei wir zusätzlich die folgenden Bedingungen stellen:

- (1) jede Ecke und Spitze ist ein Vertex,
- (2) jeder Kantenpunkt liegt auf einer Grenze.

Weiterhin heißt eine Landkarte auf einer Orbifläche *einfach*, falls jedes Land einfach ist. Für eine einfache Landkarte auf einer Orbifläche, definieren wir die Euler-Charakteristik als

$$\sum_{v \in \text{Vertices}} \frac{1}{|v|} - \sum_{g \in \text{Grenzen}} \frac{1}{|g|} + \sum_{l \in \text{Länder}} \frac{1}{|l|}$$

wobei wir setzen

$$|v| = \begin{cases} N & \text{falls } v \text{ eine Spitze mit Orbizahl } N \text{ ist,} \\ 2M & \text{falls } v \text{ eine Ecke mit Orbizahl } M \text{ ist,} \\ 2 & \text{falls } v \text{ auf einer Kante liegt, aber kein Eckpunkt ist,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$|g| = \begin{cases} 2 & \text{falls } g \text{ auf einer Kante liegt,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$|l| = 1$$

**Bemerkung 2.10.** Die Idee hinter dieser Numerik wird klar, wenn man eine Landkarte auf der Faltfläche  $\mathbb{F}_T$  einer Figur  $T$  betrachtet: Wir entfalten diese Landkarte in der Ebene und überzeugen uns, dass das Resultat eine Landkarte in der Ebene definiert. Dann gibt es für jeden Vertex  $\tilde{v}$  in der entfalteten Landkarte, der auf  $v$  in  $\mathbb{F}_T$  gefaltet wird, genau  $|v|$  Symmetrien, die  $\tilde{v}$  fixieren. Genauso gibt es für jede Grenze  $\tilde{g}$  genau  $|g|$  Symmetrien.

**Aufgabe 2.11.** Sei  $\mathbb{F}$  eine Orbifläche. Verallgemeinere Satz 2.2: Zeige, dass jede endliche einfache Landkarte auf  $\mathbb{F}$  die gleiche Euler-Charakteristik hat.

Für jede Orbifläche  $\mathbb{F}$ , die eine endliche einfache Landkarte besitzt, können wir also die *Euler-Charakteristik von  $\mathbb{F}$*  definieren als

$$\chi(\mathbb{F}) = \text{Euler-Charakteristik einer endlichen einfachen Landkarte auf } \mathbb{F}.$$

Einige Beispiele von Euler-Charakteristiken:

Sphäre	2
Sphäre mit einer Spitze mit Orbizahl $N$	$2 - \frac{N-1}{N}$
Hemisphäre mit Äquator als Kante	1
Torus	0
Faltfläche von *632	0

### 2.3 Hauptsatz

**Satz 2.12.** Sei  $T$  ein Tapetenmuster. Dann gilt  $\chi(\mathbb{F}_T) = 0$ .

*Beweis.* Wir wählen eine endliche einfache Landkarte  $L$  auf  $\mathbb{F}_T$  und entfalten die Landkarte in der Ebene. Wir betrachten einen Fundamentalbereich  $B$  dessen Rand durch Grenzen der Karte gegeben ist. Weiter wählen wir einen Radius  $r > 0$  und betrachten das ebene Gebiet  $A$ , das alle Kopien von  $B$  (under Symmetrien von  $T$ ) enthält, welche im Kreis mit Radius  $r$  enthalten sind. Sei  $k$  die Anzahl von Kopien von  $B$ , die  $A$  enthält. Wir entfernen nun den Teil der entfalteten Landkarte der nicht in  $A$  (zusammen mit seinem Rand) enthalten ist, und erhalten so eine endliche Landkarte  $\tilde{L}$  in der Ebene. Für jedes Land in  $L$  enthält  $\tilde{L}$  genau  $k$  Länder (genau ein Land in jeder Kopie von  $B$ ). Wir erhalten also die Formel

$$|\{\text{Länder in } \tilde{L}\}| = k|\{\text{Länder in } L\}|.$$

Für jede Grenze  $g$  in  $L$  enthält  $\tilde{L}$  in etwa  $\frac{k}{|g|}$  Grenzen: Falls  $g$  eine Kante in  $\mathbb{F}_T$  ist, dann liegt jede zugehörige Grenze in  $L$  auf einer Spiegelachse. In diesem Fall taucht die Grenze in genau zwei Fundamentalbereichen auf, es sei denn, die Kante liegt am Rand von  $A$ . Deswegen gibt die Formel eine Zahl die etwas kleiner ist, als die tatsächliche Zahl – diejenigen Spiegelgrenzen, die auf dem Rand von  $A$  liegen werden per Formel mit Gewicht  $\frac{1}{2}$  gezählt, obwohl sie nur in einem Fundamentalbereich vorkommen. Wir schreiben also

$$|\{\text{Grenzen in } \tilde{L}\}| = \epsilon + k \sum_{g \in \text{Grenzen in } L} \frac{1}{|g|}$$

Allerdings können wir den Fehler  $\epsilon$  im Verhältnis zu  $k$  beliebig klein machen, indem wir den Radius  $r$  vergrößern: die Anzahl der Grenzen auf dem Rand von  $A$  wächst proportional zu  $r$  (dem Umfang), während die Anzahl aller Grenzen in  $A$  proportional zu  $r^2$  (der Fläche), und demnach auch proportional zu  $k$ , wächst. Wenn  $r$  groß wird, dann wird also  $\epsilon/k$  beliebig klein.

Durch ein vollständig analoges Argument, erhalten wir die Formel

$$|\{\text{Vertizes in } \tilde{L}\}| = \delta + k \sum_{v \in \text{Vertizes in } L} \frac{1}{|v|},$$

wobei  $\epsilon/k$  für großes  $r$  beliebig klein wird.

Andererseits, können wir die Karte  $\tilde{L}$  mittels (inverser) stereographischer Projektion als eine Karte auf der Sphäre auffassen, so dass das Komplement von  $A$  ein Land ist,

welches den Nordpol enthält. Dies ergibt eine Karte auf der Sphäre die somit Euler-Charakteristik 2 hat. Wir kombinieren alle Formeln und erhalten

$$\begin{aligned} 2 &= \chi(S^2) = |\{\text{Vertizes in } \tilde{L}\}| - |\{\text{Grenzen in } \tilde{L}\}| + |\{\text{Länder in } \tilde{L}\}| + 1 \\ &= \delta - \epsilon + k\chi(\mathbb{F}_T) + 1 \end{aligned}$$

und demnach

$$\chi(\mathbb{F}_T) = \delta/k - \epsilon/k + 1/k.$$

Nach den obigen Abschätzungen wird die rechte Seite für großes  $r$  beliebig klein. Dies impliziert  $\chi(\mathbb{F}_T) = 0$ .  $\square$

**Aufgabe 2.13.** Verifiziere die Formel  $\chi(\mathbb{F}_T) = 0$  für Tapetenmuster deiner Wahl durch explizite Rechnung mittels einer gewählten Landkarte.

**Satz 2.14.** Sei  $T$  ein Tapetenmuster, und sei  $P(T)$  der Preis des zugehörigen Symmetriecodes. Dann gilt die Formel

$$\chi(\mathbb{F}_T) = \chi(S^2) - P(T).$$

Insbesondere folgt daraus unser Hauptsatz 1.7.

*Beweisskizze.* Schritt 1: Wir beginnen mit der Sphäre  $S^2$ . Der Symmetriecode eines Tapetenmusters kann nun als Anleitung für eine Folge chirurgischer Eingriffe interpretiert werden, die die Sphäre Schritt für Schritt abändern. Jedes Zeichen im Symmetriecode korrespondiert hier zu einem elementaren Eingriff:

- (1) Das Zeichen  $\circ$  korrespondiert zum Ankleben eines Henkels. Wir entfernen also eine Kreisscheibe im Inneren der Orbifläche und kleben einen Henkel an den entstandenen Rand. Wie in Aufgabe 2.4 (2) schon gezeigt wurde, reduziert sich dabei die Euler-Charakteristik um 2. Wenn wir an die Sphäre einen Henkel kleben, dann erhalten wir einen Torus. Dies ist die Falt-Orbifläche für ein Tapetenmuster das neben den Translationssymmetrien keine weiteren Symmetrien hat.
- (2) Eine Drehzahl  $N$  korrespondiert zum Ankleben einer Kegel-Orbifläche wobei die Spitze Orbizahl  $N$  hat. Wieder entfernen wir hierzu eine Kreisscheibe und kleben den Rand des Kegels an den entstandenen Rand. Zeige, dass sich bei diesem Eingriff die Euler-Charakteristik um  $\frac{N-1}{N}$  reduziert.
- (3) Das Symbol  $*$  korrespondiert zu einer Operation, die eine Kreisscheibe im Inneren der Orbifläche entfernt, so dass der Rand dieser Scheibe zu einer Kante der Orbifläche wird. Zeige, dass sich hierbei die Euler-Charakteristik um 1 reduziert.
- (4) Eine Spiegelzahl  $M$  korrespondiert zu einer Operation, die auf einer schon bestehenden Kante der Orbifläche, einen Eckpunkt mit Orbizahl  $M$  einführt. Zeige, dass sich hierbei die Euler-Charakteristik um  $\frac{M-1}{2M}$  reduziert.
- (5) Das Symbol  $\times$  korrespondiert zum Eingriff, der eine Kreisscheibe entfernt, und an den entstandenen Rand ein Möbiusband einklebt. Zeige, dass sich die Euler-Charakteristik hierbei um 1 reduziert.

Mit etwas Arbeit zeigt man nun, dass die so erhaltene Orbifläche genau die Faltfläche  $\mathbb{F}_T$  ist.

Schritt 2: Man zeigt, dass sich bei jedem der Eingriffe (1)-(5) die Euler-Charakteristik genau um den zugehörigen Preis des Symbols im Symmetriecode verringert. Dies impliziert die Aussage des Satzes.  $\square$

**Aufgabe 2.15.** Verifiziere die Aussage von Schritt 1 für möglichst viele Tapetenmuster deiner Wahl. Gib einen ausführlichen Beweis von Schritt 2.

**Aufgabe 2.16.** Offenes Ende: Die Lösung von Aufgabe 2.14 impliziert, dass auch Symmetriecodes welche nicht genau 2 € kosten eine geometrische Interpretation haben. Was passiert zum Beispiel wenn ein Code billiger als 2 € ist? Kann man diesen Code als Tapetenmuster auf der Sphäre interpretieren? Finde interessante Beispiele für sphärische Tapetenmuster und untersuche deren Symmetriecodes. Können wir all dies benutzen um Tapetenmuster auf der Sphäre, Teekanne, zu klassifizieren? Diese Thematik ist ausführlich im Buch [1] beschrieben.

## Literatur

- [1] J. Conway, H. Burgiel, and C. Goodman-Strauss. *The symmetries of things*. CRC Press, 2008.
- [2] J. Conway, P. Doyle, J. Gilman, and B. Thurston. *Geometry and the Imagination*. Lecture notes available online, 1991.