Gruppenwertige Flüsse
Übertragung endlicher Sätze ins unendliche

Bachelor Arbeit

von

Tim Sebastian Rühmann
geboren am 30. Dezember 1986 in Hamburg

27. März 2010

Betreuer:
Prof. R. Diestel

Universität Hamburg

1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Übertragung von Ergebnissen der Flusstheorie von zusammenhängenden endlichen Multigraphen auf zusammenhängende lokal endliche unendliche Multigraphen. Der Arbeit liegt das Buch Graphentheorie [1] von Reinhard Diestel in der elektronischen Ausgabe von 2006 zu Grunde. Alle Bezeichnungen und Symbole werden, sofern nicht anders angemerkt, analog zu [1] verwendet. Die für diese Arbeit wichtigsten Definitionen und Notationen werden hier nochmals wiedergegeben.
Alle in dieser Arbeit betrachteten Multigraphen sind zusammenhängend, lokal endlich und somit abzählbar. Es werden nur zusammenhängende Multigraphen betrachtet, da sich zwei Flüsse auf verschiedenen Zusammenhangskomponenten immer zu einem Fluss auf der Vereinigung dieser Komponenten addieren lassen; es werden also alle Multigraphen als zusammenhängend angenommen. Da in der folgenden Flusstheorie an Schlingen keinerlei Anforderungen gestellt werden, seien alle Multigraphen als schlingenfrei angenommen. Die im Folgenden betrachteten Sätze sind aus den Kapitel 5.3, 5.4 sowie 5.6 in [1].

2 Definitionen und Hauptlemma

Definition (Multigraph)**.** Ein Tripel $G = (V, E, \iota)$ aus zwei disjunkten (möglicherweise unendlichen Mengen) V und E zusammen mit einer Abbildung ι von $E \to V \cup [V]^2$ heißt *Multigraph.* Man bezeichnet V als *Eckenmenge* und E als *Kantenmenge.* Die Elemente der Eckenmenge heißen *Ecken* und die Elemente der Kantenmenge *Kanten.* Für die Eckenmenge eines Multigraphen G schreibt man $V(G)$ und für Kantenmenge $E(G)$. Statt $\iota(e) = \{x, y\}$ schreibt man häufig nur $\iota(e) = xy$. Die Abbildung ι heißt dabei Inzidenzfunktion und man nennt e mit x und y *inzident* wenn $\iota(e) = xy$, zudem heißen x und y dann *benachbart.* Sollte es verschiedene Kanten geben, welche den mit selben Ecken x, y inzident sind, bezeichnet man diese als *Mehrfachkanten.* Ein Multigraph ohne Mehrfachkanten wird *Graph* oder *schlichter Graph* genannt.

Definition (Strahlen und Enden)**.** Ein unendlicher Graph der Form

$$V = \{x_0, x_1, x_2, \dots\} \qquad E = \{x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3, \dots\}$$

heißt *Strahl.* Ein *Ende* eines Multigraphen G ist eine Äquivalenzklasse von Strahlen in G. Dabei sind 2 Strahlen äquivalent, wenn für sie jede endliche Menge $S \subseteq V(G)$ beide Strahlen eine unendliche Menge an Ecken in der gleichen Komponente von $G - S$ haben. Mit *Ecken-Endengrad* bezeichnet man die maximale Anzahl an disjunkten Strahlen eines Endes. Der *Kanten-Endengrad* ist die maximale Anzahl kantendisjunkter Strahlen in einem Ende. Für mehr Information siehe [2].

Definition (Kantenrichtung)**.** Sei $G = (V, E, \iota)$ ein Multigraph. Eine *Kantenrichtung* einer Kante $e \in E$ ist ein Tripel (e, x, y) mit $\iota(e) = xy$.

Notation. Bei schlichten Graphen schreibt man anstelle von (e, x, y) auch einfach (x, y) für die Kantenrichtung. Die Menge aller Kantenrichtungen eines Multigraphen $G = (V, E, \iota)$ bezeichnet man mit $\overrightarrow{E}$. Zu gegebenen $\overrightarrow{e} = (e, x, y) \in \overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{F} \subseteq \overrightarrow{E}$ und $X, Y \subseteq V$ setze

$$\overleftarrow{e} := (e, y, x), \qquad \overleftarrow{F} := \left\{ \overleftarrow{e} \mid \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{F} \right\} \qquad \text{und}$$

$$\overrightarrow{F}(X, Y) := \left\{ (e, x, y) \in \overrightarrow{F} \mid x \in X, y \in Y; x \neq y \right\}.$$

Dabei heiße $\overleftarrow{e}$ die zu $\overrightarrow{e}$ entgegengesetzte Kantenrichtung. Statt $\overrightarrow{F}(\{x\}, Y)$ schreibt man auch kurz $\overrightarrow{F}(x, Y)$. Im Weiteren werden die Kanten einer Kantenrichtungen benutzt, um Eigenschaften von Kanten auf Kantenrichtungen zu betrachten. So nenne man eine Kantenrichtungsmenge *trennend* in einem Multigraphen G, wenn die von ihr enthaltenen Kanten G trennen. Des Weiteren wird eine Menge von Kantenrichtungen als *Schnitt* von G aufgefasst, wenn ihre Kanten einen Schnitt von G bilden.
Wie üblich bezeichnet $\overline{X}$ das Komplement $V \setminus X$ einer Eckenmenge $X \subseteq V$.
Für Eckenmengen $X, Y \subseteq V$ und eine Abbildung $f : \overrightarrow{E} \to H$ in eine abelsche Gruppe H sei

$$f(X, Y) := \sum_{\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}(X,Y)} f(\overrightarrow{e}) \quad \text{und} \quad f(x, Y) := f(\{x\}, Y).$$

Bemerkung. Alle in dieser Arbeit vorkommenden Gruppen sind kommutativ und werden additiv geschrieben mit neutralem Element 0. Bis auf $\mathbb{Z}$ sind sie auch immer endlich. Beides wird im Folgenden stets vorausgesetzt.

Definition (H-Fluss)**.** Sei G ein Multigraph mit Eckenmenge E und H eine abelsche Gruppe. Eine Abbildung $f : \overrightarrow{E} \to H$ heißt *H-Fluss*, wenn gilt:

(F1) $f(\overrightarrow{e}) = -f(\overleftarrow{e})$ für alle $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}$

(F2) $f(\overrightarrow{e}) \neq 0$ für alle $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}$

(F3) Für alle $X \subseteq V$ mit $\overrightarrow{E}(X, \overline{X})$ endlich gilt $f(X, \overline{X}) = 0$.

Bemerkung. Für endliche Multigraphen ist diese Definition äquivalent mit der Defintion eines H-Flusses in [1]:
Wegen (F3) ist insbesondere $f(x, V) = 0$ für alle $x \in V$. Die Umkehrung gilt nach Proposition 5.1.1. in [1]

Definition (k-Fluss)**.** Es sei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl und $G = (V, E, \iota)$ ein lokal endlicher Multigraph. Ein $\mathbb{Z}$-Fluss f auf G, so dass

$$0 < |f(\overrightarrow{e})| < k \ \forall \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}$$

heißt *k-Fluss.*

Notation. Es sei S ein Schnitt, V_1, V_2 dazugehörigen Eckenpartitionen und f ein H-Fluss. Mit $\overrightarrow{S}(V_1, V_2)$ bezeichne man die Menge der von V_1 nach V_2 orientierten Kantenrichtungen der zu S gehörenden Kanten. Damit ist $f(\overrightarrow{S})$ nur bis auf das Vorzeichen eindeutig definiert, je nach Reihenfolge von V_1 bzw. V_2. Dies führt aber im Weiteren nicht zu Problemen, da dies nur zum Nachweis von (F3) benötigt wird und damit nur $f(\overrightarrow{S}) = 0$ nachgewiesen werden muss. Man bezeichne $f(\overrightarrow{e})$ bzw. $f(\overrightarrow{E})$ als *Flusswerte* von f an einer Kantenrichtung $\overrightarrow{e}$ bzw. Menge von Kantenrichtungen $\overrightarrow{E}$. Für k-Flüsse seien diese Begriffe analog definiert.

Definition (Flusszahl)**.** Es sei $G = (V, E, \iota)$ ein lokal endlicher Multigraph. Das kleinste k für das G einen k-Fluss besitzt, heißt *Flusszahl* und wird mit $\varphi(G)$ bezeichnet. Gibt es kein solches k, so setze $\varphi(G) = \infty$.

Im Folgenden soll zu jedem lokal endlichen Multigraphen G eine Folge von Hilfsgraphen G_n definiert werden. Dafür sei für jedes G eine feste Eckenaufzählung $v_0, v_1, v_2, \ldots$ gewählt; diese Eckenaufzählung sei im Folgenden immer gewählt.

Definition (G_n)**.** Es sei G ein zusammenhängender lokal endlicher Multigraph, $v_0, v_1, v_2, \ldots$ eine Aufzählung seiner Ecken. Man kontrahiere alle Kanten, welche nicht zu $v_0, v_1, \ldots, v_n$ inzident sind. Da alle Multikanten gemeinsam kontrahiert werden, entstehen keine Schlingen. Der so erhaltende Multigraph heiße G_n.

Bemerkung. Anschaulich werden alle Komponenten von $G \setminus \{v_0, \ldots, v_n\}$ jeweils zu einer Kontraktionsecke, wobei Multikanten erlaubt sind, also alle mit $\{v_0, \ldots, v_n\}$ inzidenten Kanten erhalten bleiben.

Notation. Mit $\overrightarrow{E_n}$ wird immer die Menge der Kantenrichtungen von G_n bezeichnet. In der weiteren Arbeit wird die Menge $\overrightarrow{E_n}$ als eine Teilmenge von $\overrightarrow{E}$, der Menge der Kantenrichtungen von G, aufgefasst. Dafür definiert man für jede Kante $e \in E(G_n) \subset E(G)$, welche mit genau einer Ecke $v_i \in \{v_0, \ldots, v_n\}$ inzident ist, eine neue Kantenrichtung. Sei $\overrightarrow{e}' = (e, x, y)$ die Kantenrichtung von e in G, dieser Kantenrichtung entspricht die Kantenrichtung $\overrightarrow{e} = (e, x, v_i)$ bzw. (e, v_i, y) in G_n. Ersetze nun für jedes solche e die Ecke v_i durch x bzw. y. Damit ist jetzt $\overrightarrow{E_n} \subset \overrightarrow{E}$, da die Kantenrichtungen, welche keine Kontraktionsecke enthalten haben, nicht verändert wurden und schon vorher identisch waren und alle Kantenrichtungen, welche keine der Ecken aus $\{v_0, \ldots, v_n\}$ enthalten haben, in G_n nicht mehr enthalten sind. Für die weitere Arbeit ist es wichtig, dass beim Übergang von $\overrightarrow{E_n}$ auf $\overrightarrow{E_n}'$ die Eigenschaft ein Schnitt zu sein erhalten bleibt. D.h., wenn die Kanten aus $\overrightarrow{E_n}$ einen Schnitt in G_n bilden, so bilden die Kanten von $\overrightarrow{E}'$ einen Schnitt in G. Das folgt, da die Menge der Kanten in E_n eine echte Teilmenge der Kanten von G ist. Analog wird die Menge der Kantenrichtungen eines G_{n_0} für alle $n \geq n_0$ als Teilmenge der Menge der Kantenrichtungen von G_n aufgefasst.

Definition (induzierter Fluss)**.** Es sei $G = (V, E, \iota)$ ein lokal endlicher Multigraph. Es sei $v_0, v_1, \ldots$ eine Aufzählung seiner Ecken, G_n sei entsprechend gewählt. Des Weiteren sei $\overrightarrow{E}$ die Menge der Kantenrichtungen von G, $\overrightarrow{E_n}$ die Menge der Kantenrichtungen von G_n. Es f sei ein H-Fluss auf G. Dann heißt f' der durch f induzierte Fluss auf G_n, wenn für alle Kantenrichtungen $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}$ von G_n gilt, dass $f'(\overrightarrow{e}) = f(\overrightarrow{e})$ist. Entsprechend ist ein induzierter Fluss auf Teilgraphen von G definiert. Analog wird von induzierte k-Flüssen gesprochen.

Definition ($lim_{n\to\infty}(f_n)$)**.** Es sei G ein lokal endlicher zusammenhängender Multigraph, $v_0, v_1, \ldots$ eine Aufzählung seiner Ecken und sei G_n zu dieser Eckenaufzählung entsprechend gewählt. Weiter sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von H- bzw. k-Flüssen auf G_n, wobei f_n ein Fluss auf G_n ist. Man nenne g den Limes der Folge der Flüsse f_n, wenn es für jede Kantenrichtung $\overrightarrow{e}$ aus G eine $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $f_n(\overrightarrow{e}) = f_{n_0}(\overrightarrow{e})$ für alle $n \geq n_0$ ist. Setze $g(\overrightarrow{e}) = f_{n_0}(\overrightarrow{e})$. Man schreibe $lim_{n\to\infty}(f_n) = g$

Das folgende Lemma ist das Hauptwerkzeug zum Beweis der meisten Sätze dieser Arbeit.

Hauptlemma (Eigenschaften von G_n)**.**
Es sei G ein lokal endlicher Multigraph, $v_0, v_1, \ldots$ eine Aufzählung seiner Ecken, dann gelten die folgenden Eigenschaften für jedes G_n.

(i) $\lambda(G) \leq \lambda(G_n)$

(ii) *Ein H- oder k-Fluss auf G induziert einen H bzw. k-Fluss auf G_n.*

(iii) *Die Anzahl der Ecken von G_n ist endlich.*

(iv) *Ist $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von H- oder k-Flüssen, wobei f_n ein H-Fluss bzw. k-Fluss auf G_n ist, für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $g := lim_{n\to\infty}(f_n)$ ein H- bzw. k-Fluss in G.*

Beweis.

(i) Angenommen, es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\lambda(G) > \lambda(G_n)$, dann sei S eine trennende Kantenmenge in G_n mit $|S| < \lambda(G)$. O.B.d.A. werde G_n von S in genau zwei Komponenten getrennt. Dann gibt es eine Komponente C, deren Ecken in $\{v_0, \dots, v_n\}$ liegen, denn wenn es so eine Komponente nicht gäbe, dann enthielte jede Komponente von $G_n \setminus S$ eine Kontraktionsecke. Aber das bedeutet, dass S die zu den Kontraktionsecken gehörenden Komponenten auch in G getrennt hätte, Widerspruch. Also gibt es ein solches C. Das bedeutet aber, dass der Schnitt $E(V(C), \overline{V(C)})$ in G_n der gleiche Schnitt ist, wie der Schnitt $E(V(C), \overline{V(C)})$ in G. D.h. S trennt G, Widerspruch.

(ii) Beweise die Aussage gleichzeitig für H- und k-Flüsse. Im Weiteren sei f entweder ein H- oder ein k-Fluss auf G. Es sei f' die von f auf G_n induzierte Abbildung. Prüfe, ob f' ein H- bzw. k-Fluss ist. Dafür sind (F1), (F2) und (F3) bzw. $0 < |f'(\overrightarrow{e})| < k$ nachzuweisen. Da $f'(\overrightarrow{e}) = f(\overrightarrow{e})$ für $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}(G_n)$ folgt sofort, dass (F1) und (F2) gelten; sollte f ein k-Fluss gewesen sein, folgt auch direkt, dass $0 < |f'(\overrightarrow{e})| < k$. Die Gültigkeit von (F3) folgt aus der Tatsache, dass jeder Schnitt S von G_n auch ein Schnitt von G ist, also $f(\overrightarrow{S}) = 0$ für jeden Schnitt in G.

(iii) Offenbar ist $\{v_0, \dots, v_n\}$ endlich. Da G lokal endlich ist, ist auch die Menge der Kanten, welche mit $\{v_0, \dots, v_n\}$ inzident sind, endlich. Damit kann es nur endlich viele Komponenten in $G \setminus \{v_0, \dots v_n\}$ geben und jede davon wird zu einer Ecke kontrahiert. Damit gibt es in G_n nur endlich viele Ecken, und da keine neuen Kanten durch Kontraktion entstehen, folgt aus der lokal Endlichkeit von G, dass G_n endlich ist.

(iv) Beweise die Aussage wieder für H- und k-Flüsse simultan. Es sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von H- bzw. k-Flüssen auf G_n, wobei f_n dabei ein Fluss auf G_n ist. Es sei V_n die Menge aller H- bzw. k-Flüsse auf G_n. Definiere einen Hilfsgraphen K auf $\cup_{n \in \mathbb{N}}(V_n)$ durch Einfügen der Kanten cc', $c \in V_n$ und $c' \in V_{n-1}$, wenn c' eine Einschränkung von c auf G_{n-1} ist. Nach Hauptlemma (iii) ist G_n endlich, damit ist nach Satz 5.3.1 in [1] jedes V_n endlich. Wende Königs-Unendlichkeits-Lemma [1] auf K an. Es sei $c_0 c_1 c_2, \dots$ der erhaltene Strahl, wobei $c_n \in V_n$.

Für jedes $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}(G)$ gibt es ein n_0, so dass $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E_n}$ für alle $n \geq n_0$, also ist $c_n(\overrightarrow{e}) = c_{n_0}(\overrightarrow{e})$ für alle $n \geq n_0$. Weiter sei $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}(G)$ beliebig und $n_0 \in \mathbb{N}$ das kleinste $n \in \mathbb{N}$ für das $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}(G_n)$, dann sei: $g(\overrightarrow{e}) = c_{n_0}(\overrightarrow{e})$. Damit ist g für jede Kantenrichtung aus G eindeutig definiert. Damit g ein H- bzw. k-Fluss ist, müssen jetzt noch (F1), (F2) und (F3) sowie im Falle der k-Flüsse $0 < |g(\overrightarrow{e})| < k$ für g gezeigt werden.

Da c_n auf jedem G_n einen H- bzw. k-Fluss ist, gelten (F1) und (F2) sowie $0 < |c_n(\overrightarrow{e})| < k$ (im Falle von k-Flüssen) für jede Kantenrichtung $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E(G_n)}$, damit gelten (F1) und (F2) (sowie $0 < |g(\overrightarrow{e})| < k$) auch für g. Für den Nachweis von (F3) sei S ein beliebiger endlicher Schnitt in G. Betrachte nun ein ausreichend großes n_0, so dass $S \subseteq E(G_{n_0})$ ist. Damit gilt $c_n(\overrightarrow{S}) = 0$ für alle $n \geq n_0$, somit gilt $g(\overrightarrow{S}) = 0$. $\square$

3 Unendliche Resultate

Im Folgenden werden die endlichen Resultate aus [1] auf lokal endliche Multigraphen übertragen. Dabei wird zuerst das endliche Resultat zitiert und dann eine Verallgemeinerung für unendliche Graphen bzw. ein entsprechendes Gegenbeispiel gegeben.

Endlicher Satz (5.3.1 in [1])**.** Zu jedem endlichen Multigraphen G existiert ein Polynom P mit der Eigenschaft, dass für jede endliche abelsche Gruppe H die Anzahl der H-Flüsse auf G gleich $P(|H|-1)$ ist.

Dieser Satz ist nicht auf lokal endliche Multigraphen zu übertragen, denn es gibt Graphen, für die es mit endlichem H unendlich viele H-Flüssen gibt.
Im Folgenden wird gezeigt, dass der Abbildung 1 zugrundeliegende ungerichtete Graph unendliche viele H-Flüsse hat, wobei als H hier die Gruppe $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ als Beispiel gewählt wird. Die in Abbildung 1 bezeichneten Werte und Richtungen der Kanten sind hier noch zu ignorieren, sie werden im Nachfolgenden erläutert.
Der Graph G lässt sich wie folgt konstruieren:
Es sei $G = (V, E)$ die einseitig unendliche Leiter, dafür sei

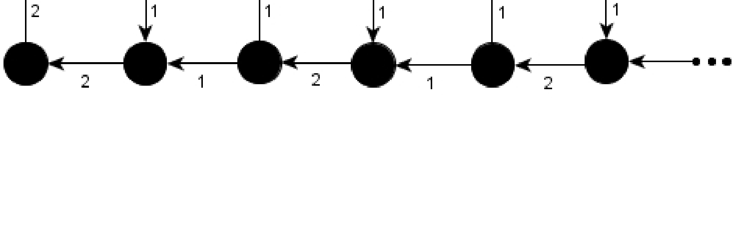
$$V := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$E := \{(x, y)|y = x + 1, x \geq 1, \text{ oder } y = x - 1, x \leq -1 \text{ oder } x = -y; x > 0\}$$

Man nennt die Kanten $e = xy$ mit $x = -y$ *Sprossen*.
Da es sich bei G um einen schlichten Graphen handelt, sei (x, y) im Folgenden jetzt die Kantenrichtung, für Kanten wird im Weiteren xy geschrieben. Für $H := \mathbb{Z}_3$ definiere jetzt eine Abbildung $f : \overrightarrow{E(G)} \to \mathbb{Z}_3$ auf G wie folgt:

$$f = \begin{cases} f(-1, 1) & = 2 \\ f(x, x+1) & = 2 \text{ für } x \geq 1 \text{ ungerade} \\ f(x, x+1) & = 1 \text{ für } x \geq 1 \text{ gerade} \\ f(x+1, x) & = 2 \text{ für } x \leq -2 \text{ gerade} \\ f(x+1, x) & = 1 \text{ für } x \leq -2 \text{ ungerade} \\ f(x, -x) & = 1 \text{ für } x \geq 2 \text{ gerade} \\ f(x, -x) & = 1 \text{ für } x \leq -2 \text{ ungerade} \end{cases}$$

Abbildung 1: Ein $\mathbb{Z}_3$-Fluss auf der (einseitig) unendlichen Leiter.



Behauptung. f ist ein $\mathbb{Z}_3$-Fluss.

Beweis. Nach Konstruktion von f sind (F1) und (F2) erfüllt. Zum Nachweis von (F3) sei S ein beliebiger endlicher Schnitt, seine Eckenpartitionen seien V_1 und V_2. Dabei ist entweder $|V_1| < \infty$ oder $|V_2| < \infty$. Angenommen $|V_1| = |V_2| = \infty$, dann gäbe es eine Sprosse e aus $E(G) \setminus S$ die in Abbildung 1 rechts von jeder Kante aus S liegt. Formal wähle hierzu eine Sprosse $e = xy \in E(G) \setminus S$ so, dass $|x| - 2$ größere ist als jede zu S indizente Ecke. Die rechten Komponenten, also jene, welche alle Ecken z mit $|z| \geq |x|$ enthalten, sind disjunkt zu S und da G dort vorher zusammenhängend war, ist es sogar nur eine Komponente. Nun gilt, dass die Menge der Ecken v mit $|v| \leq |x|$ endlich ist. Damit gibt es nur eine unendliche Komponente, Widerspruch.
O.B.d.A. sei $|V_1| < \infty$. Beweise $f(\overrightarrow{S}) = 0$ durch vollständige Induktion nach $|V_1|$. Es sei $|V_1| = 1$, da in G $f(x, V) = 0$ gilt, folgt die Behauptung. Sei nun $|V_1| = n,\ n \geq 2$. Da $\overrightarrow{S}$ ein Schnitt ist, gibt es eine Ecke $z \in V_1$ mit der eine Kante aus dem Schnitt inzident ist. Damit gilt:

$$f(\overrightarrow{S}) = f(\overrightarrow{E}(V_1, V_2)) = \sum_{(x,y) | x \in V_1, y \in V_2} f(x, y)$$

Da $f(x, V) = 0$, gilt, und da $|V_1| \geq 2$ ist, folgt:

$$= \sum_{(x,y) | x \in V_1 \setminus z, y \in V_2 \cup z} f(x, y) + f(z, V)$$

Mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{(x,y) | x \in V_1 \setminus z, y \in V_2 \cup z} (f(x, y)) = 0$$

sowie $f(z, V) = 0$ folgt $f(\overrightarrow{S}) = 0$. □

Erweitere f zu einem Fluss f' auf der Gruppe $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$.

$$f' : \overrightarrow{E} \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 : f'(\overrightarrow{E}) := (f(\overrightarrow{E}), 0)$$

Offenbar f' ist ein Fluss auf G. Definiere jetzt einen Menge von C_4 in G. Dafür sei $i \in \mathbb{N}$, $V(C_i) := \{(i), (i+1), (-i), (-i-1)\}$. Dann ist $C_i := G(V(C_i))$ ein zu C_4 isomorpher Graph, es sei $\overrightarrow{E_{c_i}}$ die Menge der Kantenrichtungen von C_i. Definiere jetzt einen Familie von Flüssen f_i auf G.

$$f_i : \overrightarrow{E} \to \mathbb{Z}_3 \text{ x } \mathbb{Z}_2 : f_i(\overrightarrow{E}) := \begin{cases} (f(\overrightarrow{e}), 1), & \text{wenn } \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E_{c_i}} \\ (f(\overrightarrow{e}), 0), & \text{sonst} \end{cases}$$

Für f_i gelten (F1),(F2) und (F3). Zu (F3) überlege man sich, dass jeder Schnitt $\overrightarrow{S}$ eine gerade Anzahl von Kanten aus C_i enthält und damit $f_i(\overrightarrow{S}) = f'(\overrightarrow{S}) = 0$. Jede Wahl von i definiert einen anderen Fluss auf G. Somit kann die Anzahl der Flüsse auf G nicht polynomiell von der Mächtigkeit der zu Grunde liegenden Gruppe abhängen, da diese hier mit 6 fix ist.
Das für die weitere Theorie wichtige Korollar 5.3.2 in [1] lässt sich allerdings auf unendliche Graphen übertragen.

Endliches Korollar (5.3.2 in [1])**.** Sind H, H' zwei abelsche Gruppen gleicher Mächtigkeit und G ein endlicher Multigraph so gilt: Es gibt genau dann einen H-Fluss auf G, wenn es einen H'-Fluss auf G gibt.

Satz 1. *Sind H, H' zwei abelsche Gruppen gleicher Mächtigkeit und G ein lokal endlicher Multigraph, so gilt: Es gibt genau dann einen H-Fluss auf G, wenn es einen H'-Fluss auf G gibt.*

Beweis. Der Beweis funktioniert direkt mit dem Hauptlemma. Dafür seien H, H' zwei Gruppen gleicher Mächtigkeit, G ein lokal endlicher Multigraph mit einem H-Fluss. Nach dem Hauptlemma haben dann alle G_n einen H-Fluss. Da G_n endlich ist, wende Korrolar 5.3.2 [1] auf G_n an. Damit gibt es einen H'-Fluss auf G_n für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nun folgt mit dem Hauptlemma, dass auch G einen H'-Fluss hat. □

Endlicher Satz (5.3.3 in [1])**.** Ein (endlicher) Multigraph hat genau dann einen k-Fluss, wenn er einen $\mathbb{Z}_k$-Fluss hat.

Dieser Satz lässt sich auch direkt auf unendliche Graphen übertragen.

Satz 2. *Ein lokal endlicher Multigraph hat genau dann einen k-Fluss, wenn er auch einen $\mathbb{Z}_k$-Fluss hat.*

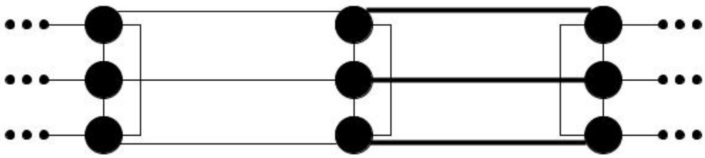
Beweis. Der Beweis der "Hinrichtung"wird hier nur der Vollständigkeit halber gegeben. Er ist genau so in [1] zu finden. Es sei σ_k der natürliche Homomorphismus $i \mapsto \bar{i}$ von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}_k$. Durch Anwenden von σ_k auf einen k-Fluss ergibt sich ein $\mathbb{Z}_k$-Fluss.
Für die andere Richtung wende wieder das Hauptlemma an. Es sei $G = (V, E, \iota)$ ein lokal endlicher Multigraph und f ein $\mathbb{Z}_k$-Fluss auf G. Nach dem Hauptlemma gibt es einen $\mathbb{Z}_k$-Fluss auf jedem G_n. Nun ist aber jedes G_n endlich, also gibt es nach Satz 5.3.3 in [1] einen k-Fluss auf jedem G_n. Damit kann man das Hauptlemma in der k-Fluss Variante auf G_n anwenden; dies ergibt einen k-Fluss auf G. □

Endlicher Satz (5.4.1 in [1])**.** Ein (endlicher) Graph hat genau dann einen 2-Fluss, wenn alle seine Eckengrade gerade sind.

Dieser Satz ist für unendliche Graphen falsch. Betrachte den Graphen G in Abbildung 2. Offenbar ist G 4-regulär und damit hat jede Ecke geraden Grad. Zudem ist G 3-kantenzusammenhängend. Dies folgt aus der Tatsache, dass jeder der K^3 mit 3 disjunkten Wegen mit jedem anderen K^3 verbunden ist. Da für einen 2-Fluss als Flusswerte jeder Kantenrichtung nur 1 bzw. -1 auftreten, muss jeder endliche Schnitt aus einer geraden Anzahl an Kanten bestehen, um (F3) zu erfüllen. Die in Abbildung 2 fett gedruckten Kanten bilden einen Schnitt aus 3 Kanten. Damit kann G keinen 2-Fluss besitzen.

Bemerkung. Hier wurde ein 3 zusammenhängendes Beispiel gewählt, um zu zeigen, dass der Ausschluss von Brücken, welche in einfacheren Gegenbeispielen, wie z.B. dem Doppelstrahl, vorkommen, nicht ausreichend ist, um den Satz wahr zu machen. Mit einer ähnlichen Konstruktion kann zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein Graph definiert werden, dessen Kantenzusammenhang mindestens k ist.

Abbildung 2: Ein 4-regulärer, 3-zusammenhängender Graph ohne 2 Fluss.



Bemerkung. Allerdings ist die Umkehrrung trivialerweise wahr. So muss jede Ecke in jedem lokal endlichen Graphen, der einen 2-Fluss hat, geraden Grad haben. Denn sollte es eine Ecke mit ungradem Grad geben, so betrachte den Schnitt dieser Ecke gegen alle anderen. Dies sind ungerade viele Kanten, d.h. die Summe über die Flusswerte ihrer Kantenrichtungen ist über $\mathbb{Z}_2$ nicht 0, und dies ist nach Satz 2 äquivalent dazu, keinen 2-Fluss zu haben, Widerspruch.

Wenn man allerdings fordert, dass der Kanten-Enden Grad gerade sein soll, erhält man eine schwächere Version des Satzes für unendliche Graphen. Hierfür wird allerdings eine Multigraphenvariante des Satzes für endliche Graphen benötigt. Im Folgenden wird die äquivalente Aussage für $\mathbb{Z}$-Flüsse gezeigt.

Korollar 3. *Ein (endlicher) Multigraph hat genau dann einen $\mathbb{Z}_2$-Fluss, wenn alle seine Eckengrade gerade sind.*

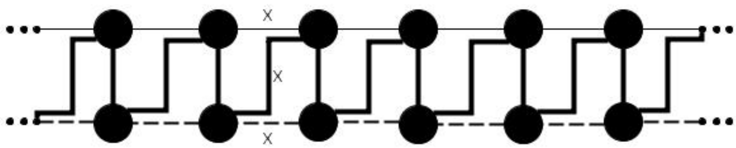
Beweis. Es sei G ein endlicher Multigraph. Der Vollständigkeit halber wird hier zuerst nochmal kurz die triviale Richtung gezeigt. Dazu sei f ein $\mathbb{Z}_2$-Fluss auf G. Da f ein $\mathbb{Z}_2$-Fluss ist und nach (F2) $f(\overrightarrow{e}) \neq 0\ \forall \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}$ gilt, folgt, dass jede Ecke in G geraden Grad hat. Sei f die Abbildung, die jeder Kantenrichtung aus G die 1 zuweist. Da für f offenbar (F1) und (F2) erfüllt sind, muss, damit f ein $\mathbb{Z}_2$-Fluss ist, nur noch (F3) nachgewiesen werden. Wie bereits nach der Definition von H-Fluss angemerkt, ist es für endliche Graphen (F3) äquivalent dazu, dass $f(x, V) = 0\ \forall x \in V(G)$, wobei f ein H-Fluss ist. Da jede Ecke geraden Grad hat folgt sofort, dass $f(x, V) = 0\ \forall x \in V(G)$ über $\mathbb{Z}_2$ gilt. □

Satz 4. *Ein lokal endlicher Graph hat genau dann einen 2-Fluss, wenn alle Eckengrade und seine Kanten-Endengrade gerade sind.*

Beweis. Es sei G ein lokal endlicher Graph bei dem alle Eckegraden und alle Kanten-Endengrade gerade sind. Nach Theorem 2.5 (iii) $\Rightarrow$ (iv) in [3][Seite 14] hat jeder endliche Schnitt von G gerade viele Kanten. (Man wähle für das Theorem als D die ganze Kantenmenge). Sei nun $v_0, v_1, \ldots$ eine Eckenaufzählung von G. Seien die G_n entsprechend gewählt. Um das Hauptlemma anwenden zu können, muss nachgewiesen werden, dass jede Ecke in G_n geraden Grad hat. Angenommen es gibt eine Ecke v in G_n, die ungeraden Grad hat. Dann ist v entweder eine Kontraktionsecke oder eine der Ecken $v_0, \ldots, v_n$. Angenommen v sei eine Kontraktionsecke in G_n. Zu jeder Kontraktionsecke gibt einen endlichen Schnitt in G, und da jeder endliche Schnitt in G aus einer geraden Anzahl von Kanten besteht, hat v auch in G_n geraden Grad, Widerspruch. Also war v eine der Ecken $v_1, \ldots, v_n$, da aber jede Ecke, nach Konstruktion von G_n, in G_n den gleichen Grad hat wie in G, führt auch dies zu einem Widerspruch. Damit hat nach dem Korollar 3 jedes G_n einen 2-Fluss. Nach dem Hauptlemma gibt es also einen 2-Fluss auf G. □

Bemerkung. Es reicht nicht zu fordern, dass alle Eckengerade und alle Ecken-Endengrade gerade sind. In Abbildung 3 wird ein entsprechendes Beispiel gegeben.

Abbildung 3: Ein 4-regulärer Graph mit Ecken-Endengrad 2

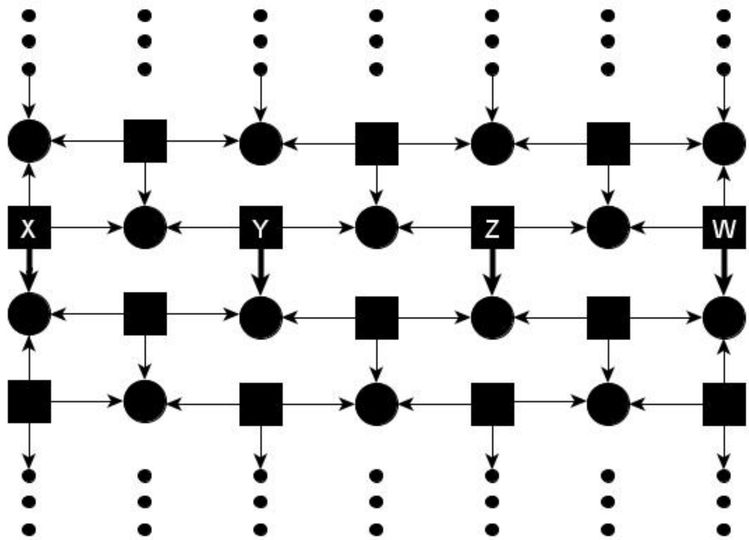


Sei G der Graph, welcher in Abbildung 3 gegeben ist. G ist 4-regulär und 2-endig. Ecken-Endengrad ist 2, da es nur 2 Ecken disjunkte Strahlen in jedem Ende gibt. Es ist offensichtlich, dass G keinen 2-Fluss besitzt, da jeder in Abbildung 3 vertikale Schnitt, z.B. alle mit x gekennzeichneten Kanten, einen Schnitt aus 3 Kanten bilden, und dies darf in Graphen mit 2-Fluss nicht der Fall sein. Allerdings ist der Kanten-Enden Grad 3, da es 3 Kanten disjunkte Strahlen in jedem Ende von G gibt. Z.B. sind die fett gedruckten, die gestrichelten und die dünn gedruckten Kanten paarweise disjunkt, bilden aber einen Strahl der zu jedem Ende gehört.

Endlicher Satz (5.4.2 [1])**.** Ein (endlicher) kubischer Graph hat genau dann einen 3-Fluss, wenn er bipartit ist.

Dieser Satz ist für unendliche Graphen falsch. Abbildung 4 zeigt ein Gegenbeispiel. Die Richtung der Kanten wird später für den Nachweis der Nichtexistenz eines 3-Flusses gebraucht.

Abbildung 4: Ein bipartiter, 3-regulärer Graph ohne 3-Fluss.



Offenbar ist G 3-regulär und da die quadratischen und runden Ecken eine Bipartition bilden, ist G auch bipartit.
Es sei $\overrightarrow{E}$ die Menge der Kantenrichtungen von G. Zum Nachweis der Nichtexistenz eines 3-Fluss werden im Folgenden die Kanten gerichtet. Dabei entspricht eine ungerichtete Kante dem Wert 0 auf der Kantenrichtung (x, y) und eine von x nach y gerichtete Kante einem Fluss von 1 auf der Kantenrichtung (x, y) und somit dem Wert -1 für (y, x). Damit auf einem 3-regulären Graphen ein 3-Fluss existieren kann, müssen an jeder Ecke entweder alle Kanten zu der Ecke hin- oder von der Ecke weggerichtet sein, da der endliche Schnitt einer Ecke x gegen $G \setminus x$ in der Summe der Flusswerte 0 betragen muss. Betrachte nun also Abbildung 4 die Ecke x. O.B.d.A. seien alle inzidenten Kanten von x weggerichtet. D.h., dass die zu den Ecken y, z, w inzidenten Kanten auch jeweils von y, z, w weggerichtet sein müssen. Damit müssen alle fett dargestellten Kanten die gleiche Richtung haben. Die fett dargestellten Kanten bilden aber einen Schnitt aus 4 Kanten, damit die Summe der Flusswerte auf diesem Schnitt gleich 0 sein kann, dürfen nicht alle Kanten die gleiche Richtung haben. Damit gibt es keinen 3-Fluss auf G.

Bemerkung. Da G sogar 3-zusammenhängend und 2-endig ist, reicht es nicht aus, diese Eigenschaften zu fordern, um den ursprünglichen Satz auf unendliche Graphen übertragbar zu machen. Allerdings ist die andere Richtung wahr. Des Weiteren ist der Satz für einendige Graphen wahr.

Satz 5. *Jeder 3-reguläre lokal endliche Multigraph, der einen 3-Fluss besitzt, ist bipartit.*

Beweis. Es sei G ein lokal endlicher, 3-regulärer Multigraph mit 3-Fluss f. Angenommen G ist nicht bipartit, dann gibt es einen Kreis ungerader Länge in G, sei dies C. Richte die Kanten von G entsprechend zu f. Da f ein Fluss auf G ist, gilt, dass $f(x, V) = 0 \; \forall \; x \in V(G)$. Damit müssen an jeder Ecke $v \in C$ alle Kanten entweder von der Ecke weg- oder auf die Ecke zugerichtet sein. Betrachte nun den Kreis C. Da C ungerade viele Ecken hat und eine abwechselnde Folge von zur Ecke hin- bzw. weggerichteten Kanten immer gerade viele Schritte benötigt, um wieder im Ursprungszustand zu sein, gibt es eine Ecke $v \in C$ bei der nicht alle Kanten gleich gerichtet sind. Damit war f kein Fluss, Widerspruch. □

Satz 6. *Jeder einendige 3-reguläre Multigraph hat genau dann einen 3-Fluss wenn er bipartit ist.*

Beweis. Sei G ein einendiger 3-regulärer lokal endlicher Multigraph. Der erste Teil der Äquivalenz, dass ein 3-Fluss auf G impliziert, dass G bipartit ist, wurde bereits in Satz 5 gezeigt. Sei also G im Weiteren als bipartit angenommen, seien A und B die beiden Partitionsklassen der Bipartition. Um einen Fluss f auf G zu definieren, richte wieder die Kanten und zwar von A nach B. Offenbar ist sind (F1) und (F2) erfüllt. Weise nun (F3) nach. Angenommen, es gibt einen Schnitt $\overrightarrow{S}$ der (F3) verletzt, o.B.d.A. trenne $\overrightarrow{S}$ den Graphen G in genau 2 Komponenten. Es gilt, dass G von $\overrightarrow{S}$ in eine endliche und eine unendliche Komponente getrennt wird. Denn sollte $\overrightarrow{S}$ den Graphen in 2 Komponenten trennen, so gibt es, da G zusammenhängend und 3-regulär und damit insbesondere lokal endlich ist, in beiden Komponenten einen Strahl nach Proposition 8.2.1 in [2]. Da $|\overrightarrow{S}| < \infty$ gehören die beiden Strahlen zu verschiedenen Enden, Widerspruch.

Also gibt es nach löschen aller Kanten aus $\overrightarrow{S}$ genau eine endliche Komponente, sei diese C. Verwende Induktion über $|C|$. Für $|C| = 1$ gilt offenbar $f(\overrightarrow{S}) = 0$, da $f(x, V) = 0 \; \forall x \in V$ gilt. Also sei $|C| \geq 2$, weiter sei $z \in V(C)$ eine Ecke die mit einer Kante aus $\overrightarrow{S}$ inzident ist.

$$f(\overrightarrow{S}) = f(\overrightarrow{E}(V(C), V(G \setminus C)) = \sum_{(x,y)|x \in V(C), y \in V(G \setminus C)} f(x, y)$$

Da $f(x, V) = 0$, gilt, und da $|C| \geq 2$ ist, folgt:

$$= \sum_{(x,y)|x \in V(C) \setminus z, y \in V(G \setminus C) \cup z} f(x, y)) + f(z, V)$$

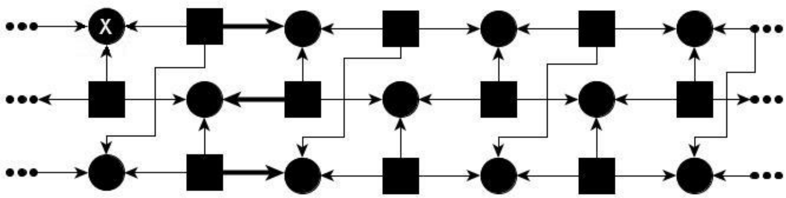
Mit der Induktionsvoraussetzung gilt:

$$\sum_{(x,y)|x \in V(C) \setminus z, y \in V(G \setminus C) \cup z} (f(x, y)) = 0$$

Mit $f(z, V) = 0$ folgt weiter, dass $f(\overrightarrow{S}) = 0$ ist. Widerspruch. □

Im Folgenden wird ein Beispiel eines Graphen gegeben, welcher 3-regulär und bipartit ist, 2 Enden besitzt, wobei jedes Ende den Kanten- und Ecken-Endengrad 3 besitzt, aber dennoch keinen 3-Fluss besitzt.

Abbildung 5: Ein 3-regulärer 2-endiger Graph ohne 3-Fluss



Es sei G durch Abbildung 5 gegeben. Offenbar ist G 3-regulär und bipartit, da die quadratischen und die runden Ecken eine Bipartition bilden, zudem hat G 2 Enden. Offenbar kann weder der Ecken- noch der Kanten-Endengrad größer 3 sein, da die 3 fett dargestellten Kanten ein immer wiederkehrenden Schnitt aus 3 Kanten darstellen, und es somit keine 3 Kanten bzw. Ecken disjunkten Strahlen in einem der Enden geben kann. Allerdings sind die in Abbildung 5 horizontal dargestellten Strahlen sowohl Kanten als auch Ecken disjunkt. Somit beträgt der Ecken- und der Kanten-Endengrad 3.

Behauptung. Es gibt keinen 3-Fluss auf G.

Beweis. Richte wieder die Kanten um einen 3-Fluss darzustellen. Es gilt wieder, damit (F1) und (F2) erfüllt sind, dass alle Kanten, welche mit v benachbart sind, zu v hin- oder von v weggerichtet sein müssen. O.B.d.A. richte alle Kanten, die mit der Ecke x in Abbildung 5 inzident sind, zu x hin- und setze dies auf ganz G fort. Dies ist in Abbildung 5 geschehen. Nun bilden aber die 3 fett dargestellten Kanten einen Schnitt aus 3 Kanten mit verschiedenen Richtungen. Damit kann die Summe der Flusswerte über diesen endlichen Schnitt nicht 0 sein. Also gibt es auf G keinen 3-Fluss. □

Endlicher Satz (5.4.3 in [1]). Für alle geraden $n > 4, n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi(K^n) = 3$.

Es gibt keine sinnvolle Verallgemeinerung dieses Satzes auf unendliche Graphen, da ein unendlicher vollständiger Graph nicht lokal endlich ist.

Endlicher Satz (5.4.4 in [1]). Jeder (endliche) 4-kantenzusammenhängende Graph hat einen 4-Fluss.

Da die im Hauptlemma auftretenden G_n in der Regel Multikanten haben, ist eine Multigraphen Version dieses Satzes notwendig, um ihn auf unendliche Graphen übertragen zu können. Der Satz 5.4.4 in [1] ist auch für endliche Multigraphen wahr und zwar mit wörtlich demselben Beweis. Er lässt sich durch Anwendung des Hauptlemmas einfach auf lokal endliche Multigraphen übertragen.

Satz 7. *Jeder lokal endliche, 4-kantenzusammenhängende (unendliche) Multigraph hat einen 4-Fluss*

Beweis. Es sei G ein unendlicher lokal endlicher 4-kantenzusammenhängender Multigraph. Sei $v_0, v_1, \ldots$ eine Aufzählung seiner Ecken. Betrachte nun die entsprechenden G_n. Nach dem Hauptlemma sind alle G_n 4-kantenzusammenhängend und endlich. Mit Satz 5.4.4 [1] haben alle G_n einen 4-Fluss. Mit dem Hauptlemma hat damit auch G einen 4-Fluss. □

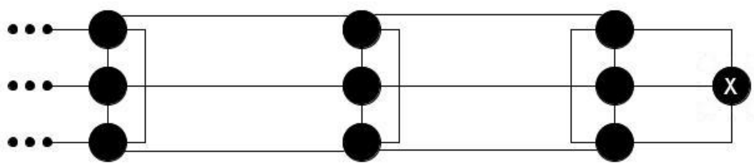
Endlicher Satz (5.4.5 [1]).

(i) Ein Graph hat genau dann einen 4-Fluss, wenn er die Vereinigung zweier gerader Teilgraphen ist.

(ii) Ein kubischer Graph hat genau dann einen 4-Fluss, wenn er 3-kantenfärbbar ist.

Dies ist ein weiterer Satz, der sich nicht auf unendliche Graphen übertragen lässt. Im Folgenden werden entsprechende Gegenbeispiele gegeben.
Zu (i) Im Weiteren wird ein Beispiel für einen Graphen gegeben, indem jede Ecke einen geraden Grad hat, der aber keinen 4-Fluss besitzt. Ausgangspunkt dafür sind 2 Graphen, der Petersen Graph, sowie der in Abbildung 6 gegebene Graph.

Abbildung 6: Ein "fast 4-regulärer"brückenloser Graph



O.B.d.A sei die Eckenmenge des Petersen Graphen $\{1, 2, \ldots, 10\}$, sei der in Abbildung 6 gegebene Graph K. Seien $K_1, K_2, \ldots, K_{10}$ 10 disjunkte (Kanten und Ecken) Kopien des Graphen K. Identifiziere die Ecke i des Petersen Graphs mit der Ecke x des Graphen K_i, nenne den erhaltenen Graphen G.
In G hat jede Ecke einen geraden Grad. Die mit x bezeichneten Ecken haben Grad 6, alle übrigen Ecken den Grad 4. Da der Petersen Graph keinen 4-Fluss

hat, kann G keinen 4-Fluss haben; denn sollte es einen 4-Fluss auf G geben, so würde dieser einen 4-Fluss auf dem Petersen Graph induzieren. Angenommen, es gäbe einen 4-Fluss auf G, sei dieser f.
Da in jedem Fluss gilt, dass $f(v, V) = 0 \ \forall v \in V$ ist, gilt insbesondere $f(x, V)$ auch für jede Ecken x. Sei $\{a_i, b_i, c_i\}$ die Menge der Kanten, welche in K_i mit x benachbart sind. Da die Graphen K_i paarweise und zudem auch zu dem Petersen Graphen disjunkt waren, folgt, dass $f(\overrightarrow{a_i}) + f(\overrightarrow{b_i}) + f(\overrightarrow{c_i}) = 0 \ \forall \ i \in \{1, \ldots, 10\}$. Sei G' der Graph, welcher durch Kontraktion aller Graphen K_i zu der Ecke x aus G entsteht. Sei f' die von f auf G' induzierte Abbildung, also sei $f'(\overrightarrow{e}) = f(\overrightarrow{e}) = \ \forall \ \overrightarrow{e} \overrightarrow{E}'$. Da f ein Fluss auf G ist, gelten (F1) und (F2) auch für f'. Sei $\overrightarrow{S}$ ein Schnitt in G' für den gilt, dass $f(\overrightarrow{S}) \neq 0$ ist. Dann ist $\overrightarrow{S}$ aber auch ein Schnitt in G. Damit war $f(\overrightarrow{S}) = 0$. Also wäre f' ein Fluss auf dem Petersen Graphen. Widerspruch.

Bemerkung. Hier wurde ein brückenloses Beispiel gewählt, um zu zeigen, dass 2-Kantenzusammenhang nicht ausreicht, um die Aussage dieses Satzes wahr zu machen. Ein einfacheres Beispiel wäre der Doppelstrahl, der, obwohl jeder Eckengrad 2 ist, keinen 4-Fluss besitzt, da jede Kante eine Brücke ist.

Zu (ii) Dieser Satz ist falsch, da der 3-reguläre unendliche Baum 3-kantenfärbar ist, aber keinen 4-Fluss besitzt, da jede Kante ein Schnitt ist.

Bemerkung. Die andere Richtung ist allerdings wahr, und zwar mit dem wörtlich gleichen Beweis wie in [1]

Offenes Problem. Es ist offen, ob eine Forderung von einem speziellen Kantenenden-Grad die Aussage von (ii) wahr machen kann. Das Hauptlemma lässt sich nicht anwenden, da über den Eckengrad in G_n keine Aussage getroffen werden kann, so ist z.B. in der unendlichen Leiter G_0 noch 3-regulär, wohingegen aber G_1 schon nicht mehr 3-regulär ist, sofern v_0 und v_1 benachbart waren.

Bemerkung. Mit einer Zusatzforderung an (i), kann man die "Rückrichtung"des Satzes auf unendliche Graphen übertragen.

Satz 8. *Ein lokal endlicher Graph, der Vereinigung zweier Teilgraphen ist, für die gilt, dass jeder Ecke- und jeder Kantenenden-Grad gerade ist, hat einen 4-Fluss.*

Beweis. Verwende im Beweise einen $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-Fluss, den es aber genau dann gibt, wenn es einen 4-Fluss gibt, nach Satz 2. Es sei also G ein lokal endlicher Graph, welcher Vereinigung zweier Graphen G_1 und G_2 ist, für die gilt, jede Ecken- und jeder Kantenenden-Grad gerade ist. Nach Satz 4 haben G_1 und G_2 jeweils einen 2-Fluss, und nach Satz 2 auch einen $\mathbb{Z}_2$-Fluss, sei f_1 der $\mathbb{Z}_2$-Fluss auf G_1 und f_2 entsprechend der $\mathbb{Z}_2$-Fluss auf G_2. Definere jetzt eine Abbildung f von $\overrightarrow{E} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ wie folgt:

$$f(\overrightarrow{e}) = \begin{cases} (f_1(\overrightarrow{e}), 0) & \text{für } \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E} \text{ und } \overrightarrow{e} \notin \overrightarrow{E} \\ (f_1(\overrightarrow{e}), f_2(\overrightarrow{e})) & \text{für } \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E} \text{ und } \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E} \\ (0, f_2(\overrightarrow{e})) & \text{für } \overrightarrow{e} \notin \overrightarrow{E} \text{ und } \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E} \end{cases}$$

Da G Vereinigung von G_1 und G_2 ist, und da f_1 und f_2 $\mathbb{Z}_2$-Flüsse sind, folgen (F1) und (F2) sofort. Zum Nachweis von (F3) sei $\overrightarrow{S}$ ein Schnitt von G für den gilt: $f(\overrightarrow{S}) \neq 0$. Es gilt:

$$f(\overrightarrow{S}) = \sum_{\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}} f(\overrightarrow{e})$$

Und nach Definition von f gilt weiter:

$$= \sum_{\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E_1} \setminus \overrightarrow{E_2}} (f_1(\overrightarrow{e}), 0) + \sum_{\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E_1} \cap \overrightarrow{E_2}} (f_1(\overrightarrow{e}), f_2(\overrightarrow{e})) + \sum_{\overrightarrow{e} \notin \overrightarrow{E_2} \setminus \overrightarrow{E_1}} (0, f_2(\overrightarrow{e}))$$

Da $f(\overrightarrow{S}) = (a, b) \neq (0, 0)$ gilt, dass $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ sind, sei o.B.d.A. $a \neq 0$. Da $\overrightarrow{E_1} \subseteq \overrightarrow{E}$ ist, bedeutet $a \neq 0$, dass auch

$$\sum_{\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{S} \cap \overrightarrow{E_1}} f(\overrightarrow{e}) \neq 0$$

Da a Summe von Werten aus f_1 ist, Widerspruch. □

Offenes Problem. Ob die Umkehrung wahr ist, ist ein offenes Problem. Der "naive Ansatz"des Beweises, also einfach den 4-Fluss als einen $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ zu betrachten, und dann G auf die Teilgraphen einzuschränken, wo entweder die erste oder die zweite Komponente dieses Fluss ungleich null ist, und dann Satz 4 anwenden zu können, scheitert dadran, dass nach Einschränkung von G die entstehenden Funktionen keinen Flüsse sind. Denn es kann passieren, das es im eingeschränkten Graphen neue endliche Schnitt gibt, die in G unendlich waren, damit gibt es keine Möglichkeit, einen Fluss auf diesen Graphen zu finden.
Dieser Fall kann auch tatsächlich eintreten. Man betrachte die beidseitig unendliche Leiter, nun unterteilt für man für jede Sprosse eine Multikante ein und unterteile dannach jede Sprosse (sowohl die älteäls auch die "neue"). Im erhaltenen Graph hat jede Ecke und jedes Kanten-Ende geraden Grad. Also gibt es dort nach Satz 4 dort einen $\mathbb{Z}_2$-Fluss. Nun fasse man diesen $\mathbb{Z}_2$-Fluss als erste Komponenten eines $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-Flusses auf. Für die zweite Komponente wähle man sich eine ëhemalige Sprosse"(also ein der unterteilten Kanten, die im Ursprungsgraphen Sprosesn waren) und gebe ihrer Kantenrichtung in der zweiten Komponete den Wert 1, und setzte dies auf allen Kantenrichtungen aller, von der Sprosse gesehen, Kanten des beiden Strahlen nach links fort. (Anschaulich hat man durch das Ende und durch diese Sprosse in der zweiten Komponente einen $\mathbb{Z}_2$-Fluss durchgeschickt). Diese Konstruktion ergibt einen $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-Fluss. Allerdings ist die Einschränkung auf die zweite Komponente ein Strahl. Und auf diesen gibt es garkeine Flüsse.

Endlicher Satz (5.6.1 in [1])**.** Jeder (endliche) brückenlose Graph besitzt einen 6-Fluss.

Zum Beweis des Satzes für unendliche Graphen wird eine etwas stärkere Version des endlichen Satzes gebraucht, nämlich die Version für Multigraphen, welche mit dem Hauptlemma in schon bekannter Weise den Satz für unendliche Graphen ergibt. Dafür wird hier ein Korollar zu Satz 5.6.1 in [1] gegeben.

Korollar 9. *Jeder (endliche) brückenlose Multigraph besitzt einen 6-Fluss.*

Beweis. Es sei G ein endlicher brückenloser Multigraph. Sei G' der Graph, welcher aus G dadurch entsteht, dass man sukzessive alle Multikanten löscht bis zwischen zwei Ecken nur noch maximal eine Kante vorhanden ist. Offenbar sind die Nachbarschaften aller Ecken in G' die gleichen, wie ihre Nachbarschaften in G. Nach dem Satz 5.6.1 in [1] hat G' einen 6-Fluss und damit auch einen $\mathbb{Z}_6$-Fluss (Satz 5.3.3. in [1]), sei dieser f. Füge nun nacheinander alle Multikanten aus G in G' ein. "Verteile“ dabei den Flusswert von f in jedem Schritt auf die neu hinzukommenden Multikanten, so dass f' ein $\mathbb{Z}_6$-Fluss bleibt. Genauer: Sei e' die zu e in diesem Schritt eingefügt Multikante. (Sollte es bereits mehr als eine Kante vorhanden sein, so wähle eine beliebige schon vorhandene Kante als e). O.B.d.A. gelte für $\overrightarrow{e} = (e, x, y)$ und $\overrightarrow{e}' = (e', z, w)$, dass $x = z, y = w$, wenn nicht, muss als Flusswert auf $e' = (e', z, w)$ das entsprechende Inverse in der Gruppe $\mathbb{Z}_6$ gewählt werden. Definiere $(f'(\overrightarrow{e}), f'(\overrightarrow{e}'))$ als neuen Flusswerte von f' an den Kantenrichtungen $\overrightarrow{e}$ bzw. $\overrightarrow{e}'$, es sei

$$(f'(\overrightarrow{e}), f'(\overrightarrow{e}')) = \begin{cases} (5,2), & \text{wenn } f(\overrightarrow{e}) = 1 \\ (5,3), & \text{wenn } f(\overrightarrow{e}) = 2 \\ (5,4), & \text{wenn } f(\overrightarrow{e}) = 3 \\ (1,3), & \text{wenn } f(\overrightarrow{e}) = 4 \\ (2,3), & \text{wenn } f(\overrightarrow{e}) = 5 \end{cases}$$

Entsprechend sei für die entgegengesetzten Kantenrichtungen das inverse Element aus $\mathbb{Z}_6$ gewählt. Damit f' ein $\mathbb{Z}_6$-Fluss ist, bleibt zu zeigen, dass $f'(\overrightarrow{e}) \neq 0$ für alle Kantenrichtungen $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}$, dies gilt nach der Definition sofort. Und damit ist $f'(\overrightarrow{E}(v, V)) = 0$ für jede Ecke $v \in V$. Es gilt, dass $f(\overrightarrow{e}) = f'(\overrightarrow{e}) + f'(\overrightarrow{e}')$ in $\mathbb{Z}_6$ ist. Des Weiteren gilt

$$f'(\overrightarrow{E}(v, V)) = \sum_{\overrightarrow{e} \text{ mit } v \in e} f'(\overrightarrow{e}) = f(\overrightarrow{E}(v, V)) = 0$$

Damit ist f' ein $\mathbb{Z}_6$-Fluss, nach Satz 5.3.3 [1] hat G dann auch einen 6-Fluss. □

Satz 10. *Jeder lokal endliche brückenlose Multigraph hat einen 6-Fluss*

Beweis. Zum Beweis wende wieder Hauptlemma an. Es sei $G = (V, E, \iota)$ ein lokal endlicher brückenloser Multigraph und $v_0, v_1, \ldots$ eine Aufzählung seinr Eckenmenge. Betrachte die entsprechenden G_n. Nach dem Hauptlemma sind die G_n brückenlos und endlich. Die Eigenschaft brückenlos zu sein, ist äquivalent dazu, einen Kantenzusammenhang größer als 1 zu haben. Und da der Kantenzusammenhang von G_n mindestens der Kantenzusammenhang von G ist, ist G_n brückenlos. Wende den Satz 5.6.1 in [1] auf G_n an. Damit hat jedes G_n einen 6-Fluss. Somit hat, nach dem Hauptlemma, G einen 6-Fluss. □

Literatur

[1] R. Diestel: *Graphentheorie* (Elektronische Ausgabe 2006), Springer-Verlag Heidelberg (2006).

[2] R. Diestel: *GraphTheory* (Elektroic Edition 2005), Springer-Verlag Heidelberg (2005).

[3] R. Diestel: *Locally finite graphs with ends: a topological approach.* (preprint 2009)