0.1 Graphen

Graph *Ecken* *Kanten*

Ein *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$ disjunkter Mengen mit $E \subseteq [V]^2$; die Elemente von E sind also 2-elementige Teilmengen von V. Die Elemente von V nennt man die *Ecken* (oder *Knoten*) des Graphen G, die Elemente von E seine *Kanten*. Bildlich kann man G darstellen, indem man seine Ecken als Punkte zeichnet und zwei dieser Punkte immer dann durch eine Linie verbindet, wenn die entsprechenden Ecken eine Kante sind (Abb. 0.1.1). Wie man diese Punkte und Linien zeichnet, ob gerade oder geschwungen, disjunkt oder überkreuz, ist eine Frage der Zweckmäßigkeit und der Ästhetik: die formale Definition eines Graphen ist jedenfalls von seiner bildlichen Darstellung unabhängig.

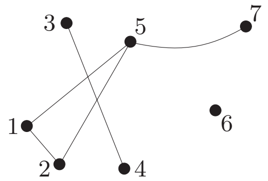

Abb. 0.1.1. Der Graph auf $V = \{1, \ldots, 7\}$ mit der Kantenmenge $E = \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{5,7\}\}$

auf $V(G), E(G)$ $|G|$, $\|G\|$ *Ordnung*

Ein Graph $G = (W, F)$ ist ein Graph *auf* W; seine Eckenmenge W bezeichnen wir mit $V(G)$, seine Kantenmenge F mit $E(G)$. Statt $v \in V(G)$ oder $e \in E(G)$ schreiben wir gelegentlich auch einfach $v \in G$ oder $e \in G$. Der Graph G heißt *endlich* bzw. *unendlich* je nachdem, ob $V(G)$ endlich oder unendlich ist. Ist nichts anderes gesagt, so sind unsere Graphen endlich. Statt $|V(G)|$ schreiben wir auch $|G|$ und nennen $|G|$ die *Ordnung* von G; statt $|E(G)|$ schreiben wir $\|G\|$.

$\emptyset$ *trivialer Graph*

Den *leeren* Graphen $(\emptyset, \emptyset)$ bezeichnen wir kurz mit $\emptyset$. Einen Graphen der Ordnung 0 oder 1 nennen wir *trivial*. Manchmal, etwa bei Induktionsanfängen, kommen triviale Graphen gelegen; anderswo bilden sie lästige Ausnahmen. Um die Darstellung der wesentlichen Aussagen nicht unnötig zu verkomplizieren, werden wir solche Ausnahmen, insbesondere für den leeren Graphen $\emptyset$, in der Regel nicht explizit nennen sondern großzügig ignorieren.

inzident $E(X,Y)$ $E(v)$

Eine Ecke v und eine Kante e *inzidieren* miteinander und heißen *inzident*, wenn $v \in e$ gilt. Die beiden Ecken einer Kante sind ihre *Endecken*, und sie *verbindet* diese Ecken. Für eine Kante $\{x, y\}$ schreiben wir kürzer auch xy (oder yx). Ist $x \in X \subseteq V$ und $y \in Y \subseteq V$, so ist xy eine *X–Y-Kante*. Die Menge aller X–Y-Kanten in einer Menge E bezeichnen wir mit $E(X,Y)$; für $E(\{x\}, Y)$ und $E(X, \{y\})$ schreiben wir kurz $E(x, Y)$ und $E(X, y)$. Die Menge $E(v, V \setminus \{v\})$ aller mit v inzidenten Kanten bezeichnen wir mit $E(v)$.

Nachbarn *vollständig* K^n

Zwei Ecken x, y von G sind (*adjazent* oder) *benachbart* in G und heißen *Nachbarn* voneinander, wenn $\{x, y\} \in E(G)$ ist. Zwei Kanten $e \neq f$ sind *benachbart*, falls sie eine gemeinsame Endecke haben. Sind je zwei Ecken von G benachbart, so heißt G *vollständig*. Einen vollständigen Graphen auf n Ecken bezeichnen wir mit K^n; ein K^3 ist ein *Dreieck*.

unabhängig

Paarweise nicht benachbarte Ecken oder Kanten nennt man *unabhängig*. Formaler: eine Teilmenge von V oder von E heißt *unabhängig*, wenn ihre Elemente paarweise nicht benachbart sind. Unabhängige Eckenmengen nennt man auch *stabil*.

Homomorphismus *isomorph* $\simeq$

Im Folgenden sei $G' = (V', E')$ ein weiterer Graph. Eine Abbildung $\varphi : V \to V'$ ist ein *Homomorphismus* von G nach G', wenn φ die Benachbartheit von Ecken erhält, wenn also für $\{x,y\} \in E$ stets $\{\varphi(x),\varphi(y)\} \in E'$ gilt. Insbesondere ist dann für jede Ecke x' im Bild von φ ihr Urbild $\varphi^{-1}(x')$ eine unabhängige Eckenmenge in G. Ist φ bijektiv und auch die Umkehrabbildung φ^{-1} ein Homomorphismus, so ist φ ein *Isomorphismus*, die Graphen G, G' heißen *isomorph*, und wir schreiben $G \simeq G'$. Ein Isomorphismus von G nach G ist ein *Automorphismus* von G.

$=$

Wir unterscheiden meist nicht zwischen isomorphen Graphen, schreiben also $G = G'$ statt $G \simeq G'$, sprechen von „dem" vollständigen Graphen auf 17 Ecken usw. Wollen wir in informellem Sprachgebrauch ausdrücken, dass es uns bei der Beschreibung eines Graphen nur um seinen Isomorphietyp geht, so nennen wir den Graphen *abstrakt*.

Eigenschaft *Invariante*

Eine unter Isomorphie abgeschlossene Klasse von Graphen nennen wir eine *Eigenschaft* von Graphen. „Ein Dreieck zu enthalten" etwa ist eine Grapheneigenschaft: hat G drei paarweise benachbarte Ecken, so hat auch jeder zu G isomorphe Graph drei solche Ecken. Eine Funktion, die Graphen als Argumente hat und isomorphen Graphen gleiche Werte zuordnet, nennt man eine (Graphen-) *Invariante*. Eckenzahl und Kantenzahl sind einfache Grapheninvarianten; die größte Anzahl paarweise benachbarter Ecken etwa wäre eine weitere.

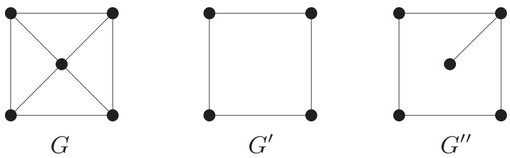

Abb. 0.1.2. Ein Graph G mit Teilgraphen G' und G'': G' ist Untergraph von G, G'' ist es nicht.

$G \cap G'$ *Teilgraph* $G' \subseteq G$ *induziert*

Wir setzen $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$ und $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$. Ist $G \cap G' = \emptyset$, so heißen G und G' *disjunkt*. Gilt $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$, so ist G' ein *Teilgraph* von G (und G ein *Obergraph* von G'), geschrieben $G' \subseteq G$. Informell sagen wir häufig einfach, dass G den Graphen G' *enthält*. Der Teilgraph G' heißt *induziert* oder *aufgespannt* (von V' in G), wenn er *alle* Kanten $xy \in E$ mit $x, y \in V'$ enthält. Einen solchen

Untergraph
$G[V']$

induzierten Teilgraphen nennen wir einen *Untergraphen*. Wir bezeichnen G' dann auch mit $G[V']$; dies ist also der Graph auf V', dessen Kanten genau die Kanten von G sind, deren Endecken beide in V' liegen. Ist G' ein Teilgraph von G (aber nicht notwendig ein Untergraph), so schreiben wir statt $G[V(G')]$ auch kürzer $G[G']$. Umgekehrt nennt man $G' \subseteq G$ einen *aufspannenden* Teilgraphen von G, wenn V' ganz G aufspannt, d.h. wenn $V' = V$ ist.

aufspannend

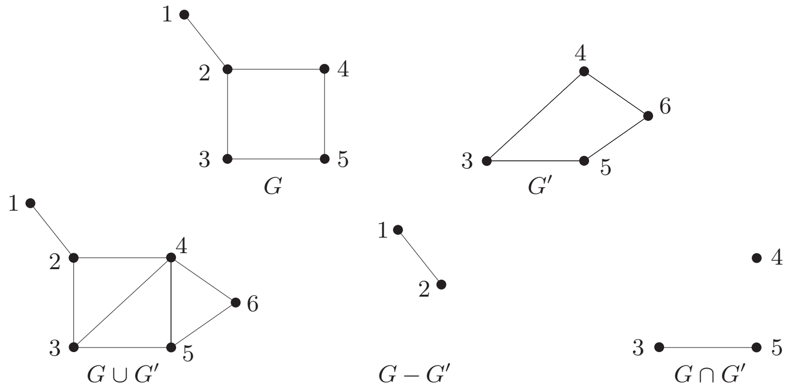

Abb. 0.1.3. Vereinigung, Differenz, Durchschnitt; die Ecken 2,3,4 spannen in $G \cup G'$ ein Dreieck auf, nicht aber in G

$G - U$

Ist U eine beliebige Menge (meist eine Teilmenge von V), so schreiben wir $G - U$ statt $G[V \setminus U]$; mit anderen Worten, $G - U$ entsteht aus G durch *Löschen* aller Ecken in $U \cap V$ und aller mit diesen Ecken inzidenten Kanten. Ist $U = \{v\}$ einelementig, so schreiben wir $G - v$ statt $G - \{v\}$. Ist H ein weiterer Graph, so schreiben wir statt $G - V(H)$ kurz $G - H$. Ist F irgendeine Teilmenge von $[V]^2$, so setzen wir $G - F := (V, E \setminus F)$ und $G + F := (V, E \cup F)$; statt $G - \{e\}$ und $G + \{e\}$ schreiben wir $G - e$ und $G + e$. Wir nennen G *kantenmaximal* mit einer gegebenen Grapheneigenschaft, wenn G selbst die Eigenschaft hat, aber kein $G + xy$ für nicht benachbarte Ecken $x, y \in G$ sie hat.

$G - H$
$G - F$
$G + F$
kantenmaximal

minimal
maximal

Sagen wir allgemeiner, ein gegebener Graph sei *minimal* oder *maximal* mit irgendeiner Eigenschaft, so meinen wir (wenn nichts anderes gesagt ist) die Minimalität oder Maximalität hinsichtlich der Teilgraphenbeziehung. Häufig werden wir auch von minimalen oder maximalen Ecken- oder Kantenmengen sprechen; hier ist die zugrundeliegende Relation natürlich einfach die Teilmengenbeziehung.

$G * G'$
Komplement $\overline{G}$
Kantengraph $L(G)$

Sind G und G' disjunkt, so bezeichnet $G * G'$ den Graphen auf $V \cup V'$ mit der Kantenmenge $E \cup E' \cup \{\, vv' \mid v \in V$ und $v' \in V' \,\}$. Das *Komplement* $\overline{G}$ von G ist der Graph auf V, in dem zwei Ecken genau dann benachbart sind, wenn sie es in G nicht sind. Der *Kantengraph* $L(G)$ von G ist der Graph auf E, in dem $x, y \in E$ genau dann als Ecken benachbart sind, wenn sie es als Kanten in G sind.