Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Mathematische Statistik und Stochastische Prozesse
Bundesstr. 55
D-20146 Hamburg

Maximale Generatoren Integral Stochastischer Ordnungen - Fortsetzung
Eigenschaften von stochastischen Ordnungen
Kleine Generatoren

Martin Kittel (4525979)

Vortrag vom 18.6.2004

Proseminar über Stochastik im SoSe 2004

Bei: Professor Dr. Hans Daduna

Basiert auf Seite 71,5 - 76 des Buches von A. Müller und D. Stoyan:
"Comparison Methods for Stochastic Models and Risks",
John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2002

Inhaltsverzeichnis

Schreibweisen

Große Skript-Buchstaben: $\mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathscr{R}, \mathscr{B}, ...$: Mengen von Funktionen

Calligraphische Buchstaben: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, ...$: σ-Algebren

"Doppelstrich"-Buchstaben: $\mathbb{M}, \mathbb{P}, ...$: Mengen signierter Maße

Einleitung

Wozu braucht man "große" und "kleine" Generatoren von integral stochastischen Ordnungen und Eigenschaften von stochastischen Ordnungen?

"Große" Generatoren sind wichtig um den gesamten Anwendungsfall abdecken zu können. Allerdings kann es dann sehr aufwendig sein, zu beurteilen, ob z.B. eine Risikoabschätzung besser oder schlechter ist. Um aber diese Vergleichsmöglichkeit zu haben, wird versucht einen "kleineren" Generator der stochastischen Ordnung zu finden, der einfacher zu überprüfen ist. Sehr einfach wird die Überprüfung, wenn es gelingt einen "kleinen" Generator zu finden, der nur aus Indikatorfunktionen besteht. Dann braucht nur punktweise verglichen zu werden.

Aus leicht zu überprüfenden Eigenschaften des Generators $\mathfrak{F}$ werden dann Eigenschaften der (integralen) stochastischen Ordnung abgeleitet, wie z.B Abgeschlossenheit bezüglich schwacher Konvergenz, Abgeschlossenheit unter Faltung, usw.

2.3 Maximale Generatoren Integral Stochastischer Ordnungen - Fortsetzung

$\mathcal{F}$ ist der Generator der Ordnung $\leq_{\mathcal{F}}$

$b(\cdot)$ ist die Gewichtsfunktion aus Kapitel 2.2 ($b : S \to [1, \infty)$)

2.3.6 Theorem

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \rho)$ ein σ-endlicher Maßraum und sei $f : \Omega \times S \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{A} \otimes \mathcal{S}$ - meßbare Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(i) $f(\omega, \cdot) \in \mathcal{F} \quad \forall \omega \in \Omega;$

(ii) Es existiert eine ρ-integrierbare Funktion $c : \Omega \to [0, \infty)$ mit $|f(\omega, s)| \leq c(\omega)b(s)$ für alle $\omega \in \Omega$ und $s \in S$.

Dann ist $g(\cdot) = \int f(\omega, \cdot)\rho(d\omega)$ endlich und Element von $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$.

Beweis:

Gegeben mit (ii) ist: $|f(\omega, x)| \leq c(\omega)b(x)$. Für allgemeines signiertes Maß $\mu \in \mathbb{M}_b$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int\int \underbrace{|f(\omega,x)|}_{\leq \text{ c}(\omega)\text{b(x)}} \rho(d\omega)|\mu|(dx) &\leq \int\int c(\omega) \underbrace{b(x)}_{\text{konst. für } \rho(d\omega)} \rho(d\omega)|\mu|(dx) \\
&= \int b(x)\Big(\int \underbrace{c(\omega)\rho(d\omega)}_{\text{konst. für } |\mu|(dx)}\Big)|\mu|(dx) \\
&= \underbrace{\Big(\int c(\omega)\rho(d\omega)\Big)}_{<\infty, \text{ da } c(\cdot)\ \rho \text{ integrierbar}} \underbrace{\Big(\int b(x)|\mu|(dx)\Big)}_{<\infty, \text{ da } \mu \in \mathbb{M}_b} \\
&< \infty
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Der Spezialfall $\mu = \delta_s$ (Einpunktverteilung) für $s \in S$ eingesetzt in das Doppelintegral ergibt die Existenz und Endlichkeit von

$$g(s) = \int f(\omega, s)\rho(d\omega).$$

denn

$$\int \underbrace{\int f(\omega,x)\rho(d\omega)}_{=g(x)} | \underbrace{\mu}_{=\delta_s} |(dx) = g(s)\cdot 1$$

Aus (2.3.4) und (ii) folgt:

$$\begin{aligned} ||g||_b = \underset{s\in S}{sup} \frac{|\int f(\omega,s)\rho(d\omega))|}{b(s)} &= \underset{s\in S}{sup} \int \frac{|f(\omega,s))|}{b(s)}\rho(d\omega) \\ &\leq \underset{s\in S}{sup} \int c(\omega)\rho(d\omega) = \int c(\omega)\rho(d\omega) < \infty \end{aligned}$$

Daraus folgt $g \in \mathcal{B}_b$ und der Satz von Fubini (Vertauschung der Integrationsreihenfolge, falls $< \infty$) darf angewendet werden. Dann gilt für $P, Q \in \mathbb{P}_b$ mit $P \leq_{\mathcal{F}} Q$

$$\begin{aligned} \int g(x)P(dx) &= \int\int f(\omega,x)\rho(d\omega)P(dx) = \int\int f(w,x)P(dx)\rho(d\omega) \\ &\leq \int\int f(\omega,x)Q(dx)\rho(d\omega) = \int\int f(\omega,x)\rho(d\omega)Q(dx) = \int g(x)Q(dx). \end{aligned}$$

Daraus folgt $g \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$. $\square$

Mit diesen Vorüberlegungen ist es jetzt möglich eine Charakterisierung der Maximalen Generatoren anzugeben.

2.3.7 Theorem

$\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ ist der Abschluß in der $\sigma(\mathcal{B}_b, \mathbb{M}_b)$-Topologie des konvexen Kegels der von $\mathcal{F}$ und den konstanten Funktionen erzeugt (aufgespannt) wird.

Beweis:

Zuerst betrachten wir die strikte Dualität wie in Lemma 2.2.2. beschrieben. $(\mathbb{M}_b^N, \mathcal{B}_{b/\sim})$ ist der linear aufgespannte Raum von $\mathbb{P}_b - \mathbb{P}_b$. Aus der Definition von $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ folgt, daß $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}/\sim}$ ist, genau dann wenn

$$\langle f, \mu\rangle \geq 0 \text{ für alle } \mu \in (\mathcal{F}_{/\sim})^+. \qquad (2.3.5)$$

Dies ist äquivalent zu $f \in (\mathcal{F}_{/\sim})^{++}$. Theorem 2.3.5 ergibt, daß $\mathcal{R}_{\mathcal{F}/\sim}$ den durch $\mathcal{F}_{/\sim}$

aufgespannten konvexen Kegel enthält. Lemma 2.3.4 c) zeigt, daß ohne Verlust der Allgemeinheit angenommen werden kann, daß $\mathcal{F}_{/\sim}$ ein konvexer Kegel ist. Nach Lemma 2.2.2 sind $\mathbb{M}_b^N$ und $\mathcal{B}_{b/\sim}$ in strikter Dualität und mit Theorem 2.2.3 und (2.3.5) folgt, daß $\mathcal{R}_{\mathcal{F}/\sim}$ der $\sigma(\mathcal{B}_{b/\sim}, \mathbb{M}_b^N)$-Abschluß auf $\mathcal{F}_{/\sim}$ ist. Mit Hilfe der Definition der Äquivalenzrelation $\sim$ ergibt sich der Beweis für $\mathcal{F}$ und die konstanten Funktionen. ($f \sim g$ gilt, wenn $f - g$ konstant ist, der zugehörige Quotientenraum wird mit $\mathcal{B}_{b/\sim}$ beschriftet.)

2.3.8 Theorem

Auf einer in der $\|\cdot\|_b$-norm beschränkten Teilmenge von $\mathcal{B}_b$ stimmen die $\sigma(\mathcal{B}_b, \mathbb{M}_b)$-Topologie und die Topologie der punktweisen Konvergenz überein.
Beweis:
" $\Rightarrow$ "
$\mathbb{M}_b$ enthält alle Einpunkt-Wahrscheinlichkeits-Maße. Deshalb folgt aus Konvergenz in der $\sigma(\mathcal{B}_b, \mathbb{M}_b)$-Topologie die punktweise Konvergenz.

" $\Leftarrow$ "
Mengen die durch die $\|\cdot\|_b$-norm beschränkt sind, sind punktweise beschränkt. Mit Hilfe der majorisierten Konvergenz folgt aus der punktweisen Konvergenz die $\sigma(\mathcal{B}_b, \mathbb{M}_b)$-Konvergenz. $\square$

Kombiniert man dieses Ergebnis mit Theorem 2.3.7 erhält man eine hinreichende Bedingung für $\mathcal{F} = \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$. Diese ist manchmal sehr leicht zu prüfen.

2.3.9 Korollar

Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ und $\mathcal{G}$ ein konvexer Kegel, der die konstanten Funktionen enthält und abgeschlossen bezüglich punktweiser Konvergenz ist. Dann ist $\mathcal{G} = \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$.

Generell ist der erweiterte maximale Generator $\tilde{\mathcal{R}}_{\mathcal{F}}$ größer als der maximale Generator $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ für eine gegebene Gewichtsfunktion b. $\tilde{\mathcal{R}}_{\mathcal{F}}$ ist definiert als die Menge aller meßbaren Funktionen $f : S \to \mathbb{R}$ (nicht notwendig in $\mathcal{B}_b$) für die gilt: Aus $P, Q \in \mathbb{P}_b$ und $P \leq_{\mathcal{F}} Q$ folgt $\int f dP \leq \int f dQ$, sofern die Integrale existieren.

2.3.10 Theorem

Sei (f_n) eine monotone Folge in $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ die punktweise gegen eine reelle Funktion f (nicht notwendig in $\mathcal{B}_b$) konvergiert. Dann ist $f \in \tilde{\mathcal{R}}_{\mathcal{F}}$.

Beweis: Für Wahrscheinlichkeitsmaße
$P, Q \in \mathbb{P}_b$ mit $P \leq_{\mathcal{F}} Q$ und endlichem $\langle |f|, P \rangle, \langle |f|, Q \rangle$, muß gezeigt werden, daß $\langle f, P \rangle \leq \langle f, Q \rangle$ gilt.

Aus $f_n \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ folgt, daß $\langle f_n, P \rangle$ und $\langle f_n, Q \rangle$ endlich sind und $\langle f_n, P \rangle \leq \langle f_n, Q \rangle$ ist.
Mit der monotonen Konvergenz folgt $\langle f, P \rangle = \int f dP = \int lim f_n dP =$
$lim \int f_n dP = lim \langle f_n, P \rangle \leq lim \langle f_n, Q \rangle = lim \int f_n dQ = \int lim f_n dQ = \langle f, Q \rangle$. $\square$

2.4 Eigenschaften von Stochastischen Ordnungen

Nun definieren wir einige interessante Eigenschaften von (integralen) stochastischen Ordnungen und zeigen, wie diese direkt aus den zugehörigen Eigenschaften des Generators $\mathcal{F}$ gefolgert werden können. Die meisten dieser Eigenschaften wurden ursprünglich von Stoyan (1983) definiert.

Manchmal ist es angenehmer die Ergebnisse für Zufallsvariablen anzugeben anstatt für Wahrscheinlichkeitsmaße. Deshalb schreiben wir $X \leq_{\mathcal{F}} Y$ wenn $P_X \leq_{\mathcal{F}} P_Y$ für die zugehörigen Verteilungen gilt. Für einige der nachfolgend definierten Eigenschaften brauchen wir eine Ordnung auf S, für andere eine Topologie oder einen Vektorraum.

Im weiteren gilt deshalb, daß S ein Polnischer Vektorraum mit einer abgeschlossenen Ordnung sei. Zur Erinnerung: Ein Topologischer Raum wird Polnisch genannt, wenn es eine vollständige Metrik gibt, welche die Topologie erzeugt und bezüglich der der Raum separabel ist.

Eine Ordnung $\preceq$ auf S wird abgeschlossen genannt, wenn die Menge $\{(x, y) \in S \times S : x \preceq y\}$ in der Produkttopologie eine abgeschlossene Teilmenge des Produktraumes $S \times S$ ist. Anders gesagt: Wenn aus $x_n \preceq y_n$ für alle n und $x_n \to x, y_n \to y$ folgt: $x \preceq y$.

Ab jetzt gilt: Alle auftretenden Verteilungen gehören zu $\mathbb{P}_b$.

Definition

Sei S ein Polnischer Vektorraum mit einer abgeschlossenen Ordnung und sei $b : S \to [1, \infty)$ eine Gewichtsfunktion. Sei $\leq_{\mathcal{F}}$ eine Stochastische Ordnung auf $\mathbb{P}_b$. Dann hat $\leq_{\mathcal{F}}$ die Eigenschaften:

- **(R)**, wenn gilt $a \leq b \Rightarrow \delta_a \leq_{\mathcal{F}} \delta_b$
- **(E)**, wenn gilt $X \leq_{\mathcal{F}} Y \Rightarrow EX \leq EY$ (sofern der Erwartungswert existiert)

- **(M)**, wenn gilt $X \leq_{\mathcal{F}} Y \Rightarrow \alpha X \leq_{\mathcal{F}} \alpha Y$ für alle Skalare $\alpha \geq 0$
- **(T)**, wenn gilt $X \leq_{\mathcal{F}} X + a$ für alle Zufallsvariablen X und positives a
- **(C)**, wenn gilt $P_1 \leq_{\mathcal{F}} P_2 \Rightarrow P_1 * Q \leq_{\mathcal{F}} P_2 * Q$ für alle Wahrscheinlichkeitsmaße Q
- **(MI)**, wenn gilt ($P_\theta \leq_{\mathcal{F}} Q_\theta$ für alle $\theta \in \Theta$) $\Rightarrow P \leq_{\mathcal{F}} Q$, wobei $P = \int P_\theta \mu(d\theta)$ und $Q = \int Q_\theta \mu(d\theta)$ für ein Maß μ in Θ, d.h. P und Q sind μ-Mischungen der Familien (P_θ) bzw. (Q_θ)
- **(W)**, wenn gilt: $\leq_{\mathcal{F}}$ ist abgeschlossen bezüglich der schwachen Konvergenz, d.h.: wenn $P_n \leq_{\mathcal{F}} Q_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und die Folgen (P_n) und (Q_n) gegen P bzw. Q schwach konvergieren, dann ist $P \leq_{\mathcal{F}} Q$

Die Eigenschaft (R) bedeutet, daß die Stochastische Ordnung sich genau so verhält wie die Ordnungsstruktur auf S. z.B. wenn die Stochastische Ordnung auf die Einpunktmaße beschränkt wird, dann erhält man einen Ordnungsisomorphismus zwischen diesem Raum und dem geordneten Raum S.

Die meisten der anderen Eigenschaften werden auch als Eigenschaften für Abgeschlossenheit bezeichnet:
(E) Abgeschlossen bezüglich der Bildung des Erwartungswertes,
(C) wird gelegentlich als abgeschlossen unter Faltung,
(MI) wird auch als abgeschlossen unter Mischung und
(W) wird auch als abgeschlossen bezüglich schwacher Konvergenz bezeichnet.

Alle diese Eigenschaften von Stochastischen Ordnungen werden zurückgeführt auf den Generator $\mathcal{F}$ bzw. den maximalen Generator $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$.

Im folgenden wird wie üblich die Menge aller beschränkten stetigen Funktionen mit $\mathcal{C}_b$ bezeichnet.

2.4.1 Theorem

a) Eigenschaft (R) gilt genau dann, wenn alle Funktionen in $\mathcal{F}$ wachsend sind.

b) Eigenschaft (E) gilt genau dann, wenn $\widetilde{\mathcal{R}}_{\mathcal{F}}$ alle wachsenden linearen Funktionen enthält.

c) Eigenschaft (M) gilt genau dann, wenn $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ skalen-invariant ist, d.h. für $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ und $\alpha > 0$ folgt $f_\alpha \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$, wobei $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$.

d) Eigenschaft (T) gilt genau dann, wenn alle Funktionen in $\mathcal{F}$ wachsend sind.

e) Eigenschaft (C) gilt genau dann, wenn $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ invariant unter Translation ist, d.h. aus $f(\cdot) \in \mathcal{F}$ folgt $f(\cdot + a) \in \mathcal{F} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

f) Eigenschaft (MI) gilt immer!

g) Eigenschaft (W) gilt genau dann, wenn es einen Generator $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}_b$ gibt für $\leq_{\mathcal{F}}$.

2.5 Small Generators - Kleine Generatoren

Im Gegensatz zu den Maximalen Generatoren gibt es im allgemeinen kein eindeutiges minimales Element in der Menge der Generatoren der Ordnung $\leq_{\mathcal{F}}$. Oft existieren jedoch kleine Generatoren, die dieselbe Ordnung erzeugen und bei denen es wesentlich einfacher ist $P \leq_{\mathcal{F}} Q$ zu prüfen.

Für das nachfolgende Theorem gilt folgende Notation:
Eine Teilmenge B eines Kegels K eines Vektorraumes wird als Basis bezeichnet, wenn es für jedes $x \in K$ mit $x \neq 0$ ein eindeutiges $y \in B$ und ein eindeutiges $\alpha > 0$ mit $x = \alpha y$ gibt. Ein Punkt $x \in B$ wird ein Extrempunkt von B genannt, wenn $x = \alpha y + (1-\alpha)z$ für $\alpha \in (0,1)$ und $y, z \in B$ nur lösbar ist für $x = y = z$.

2.5.1 Theorem

a) Wenn $\mathcal{F}$ ein konvexer Kegel ist, dann erzeugen die folgenden Teilmengen vom $\mathcal{F}$ auch $\leq_{\mathcal{F}}$:

   (i) Jede Basis von $\mathcal{F}$

   (ii) Die Menge der Extrempunkte einer konvexen Basis, wenn diese eine kompakte Teilmenge des normierten Raumes $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_b)$ sind.

b) Jede Menge, welche dicht in $\mathcal{F}$ ist bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz, ist ein Generator von $\leq_{\mathcal{F}}$.

Beweis:
a) (i) Wenn $\mathcal{G}$ eine Basis von $\mathcal{F}$ ist, dann enthält $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ nach Theorem 2.3.5 den von $\mathcal{G}$ erzeugten Kegel. Daraus folgt: $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{R}_{\mathcal{G}}$. Aus Lemma 2.3.4c folgt, daß $\leq_{\mathcal{F}}$ und $\leq_{\mathcal{G}}$ identisch sind.
(ii) Sei $\mathcal{G}$ eine konvexe kompakte Basis des konvexen Kegels $\mathcal{F}$ und sei $\mathcal{W}$ die Menge der Extrempunkte von $\mathcal{G}$. Dann ist es mit Lemma 2.3.4 c) nur nötig zu zeigen, daß $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}_{\mathcal{W}}$. Nach Theorem 2.3.5 ist $\mathcal{R}_{\mathcal{W}}$ konvex und $\|\cdot\|_b$-abgeschlossen. Mit Hilfe des Krein-Milman Theorems (eine konvexe Menge wird von den Extremalpunkten erzeugt) leitet man $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}_{\mathcal{W}}$ her. Da $\mathcal{F}$ der konvexe Kegel ist, der von $\mathcal{G}$ erzeugt wird, folgt die Behauptung mit Theorem 2.3.7.

b) Beweis wie a) (i) mit 2.3.4 und 2.3.5 b).

Mit Hilfe von kleinen Generatoren ist es oft leichter zu prüfen, ob zwei Zufallsvariablen geordnet sind oder nicht. Wenn es z.B. gelingt für eine Stochastische Ordnung einen kleinen Generator zu finden, der aus Indikatorfunktionen besteht, so muß nur noch die Verteilungsfunktion punktweise verglichen werden.

2.5.2 Beispiel

Generatoren und Eigenschaften der stochastischen Ordnung $\leq_{st}$:
Wir betrachten die stochastische Ordnung $\leq_{st}$ für Verteilungen auf der reellen Achse. Es sei $S = \mathbb{R}$ mit der Borel σ-Algebra $\mathbb{B}$. Als Gewichtsfunktion wird b≡1 gewählt. Dann enthält $\mathbb{P}_b$ alle Wahrscheinlichkeitsmaße und $\mathcal{B}_b$ ist die Menge aller beschränkten Funktionen. Nach Theorem 1.2.8 gilt $X \leq_{st} Y \Leftrightarrow Ef(X) \leq Ef(Y)$ für alle steigenden Funktionen, falls beide Erwartungswerte existieren. Daraus folgt, daß die Menge aller steigenden Funktionen der erweiterte maximale Generator $\tilde{\mathcal{R}}_f$ ist und die Menge aller beschränkten wachsenden Funktionen ein Generator von $\leq_{st}$ ist. Da diese Menge ein konvexer Kegel ist, der die konstanten Funktionen enthält und abgeschlossen unter punktweiser Konvergenz ist, folgt mit Korollar 2.3.9, daß sie der maximale Generator ist. Mit den Bedingungen aus Theorem 2.4.2 ergibt sich, daß $\leq_{st}$ die Eigenschaften (R), (E), (M,), (T), (C), (MI) und (W) erfüllt.

Literaturverzeichnis

A. Müller, D. Stoyan (2002): "Comparison Methods for Stochastic Models and Risks", John Wiley & Sons Ltd, Chichester

K. Behnen und G. Neuhaus (2003): "Grundkurs Stochastik". PD-Verlag, Heidenau.

Heinz Bauer (1978): "Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie", 3. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin, New York