Übungsblatt 1

(Abgabe 26.10.09 vor der Vorlesung)

1. Sei $p := (1,0,0)$ und $H^2 := \{(x,y,z) | -x^2+y^2+z^2 = -1,\ x > 0\}$. Wir versehen H^2 mit der durch $-dx^2+dy^2+dz^2$ induzierten Metrik.

   a) Zeigen Sie, dass der Schnitt jeder Ebene, die den Koordinatenursprung und p enthält, mit H^2 das Bild einer Geodäten ist.

   b) Bestimmen Sie die Exponentialabbildung

   $$\exp_p : U \to H^2 \,,$$

   wobei U eine möglichst große offene Umgebung von $0 \in T_pH^2$ sein soll.

2. Berechnen Sie in der Situation von Aufgabe 1

   $$(d\,\exp_p)_{t\,e_2}(t\,e_3)\,,$$

   wobei $t \in \mathbb{R}$ und (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ ist. Machen Sie sich auch klar, was für ein geometrisches Objekt $(d\,\exp_p)_{te_2}(t\,e_3)$ ist, wenn t variabel ist.

3. Sei (M,g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert ein Atlas, so dass für jede Karte die Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ orthonormal sind. Was folgt hieraus für die Geometrie von (M,g)?

4. Seien (M,g) und (N,h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine Isometrie. Weiterhin sei ∇^g der Levi-Civita-Zusammenhang auf (M,g) und ∇^h der Levi-Civita-Zusammenhang auf (N,h). Beweisen Sie die folgende Formel:

   $$(df)(\nabla^g_X Y) = \nabla^h_{df(X)} df(Y) \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M)\,.$$