Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Department Mathematik
Diskrete Mathematik
Dr. Oliver Cooley

Elementare Zahlentheorie Übungsaufgaben über Weihnachten. Dieses Blatt muss nicht abgegeben werden.

Aufgabe W1:
Zeigen sie die Äquivalenz folgender Eigenschaften einer Primzahl $2 \neq p \in \mathbb{P}$:

a) Es ist $p \equiv 1 \mod 4$.

b) Es gibt $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $p = a^2 + b^2$.

c) Es gibt $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ beide keine Einheiten, sodass $p = \alpha\beta$.

d) Modulo p ist -1 ein Quadrat.

e) Modulo p zerfällt das Polynom $x^2 + 1$ in Linearfaktoren.

Aufgabe W2:
Sei p eine Primzahl mit $p \equiv \pm 1 \mod 8$. Dann gibt es kein Hindernis modulo p gegen die Existenz einer Lösung zur Gleichung $X^2 - 2 = 0$ (denn 2 ist ein quadratischer Rest modulo p). Kann es ein Hindernis modulo p^2 geben?

Aufgabe W3:
a) Bestimmen Sie alle Lösungen (x, y, z) zur Gleichung $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = \frac{1}{Z}$ mit $x, y, z \in \mathbb{N}^+$.

b) Gibt es nicht-triviale ganzzahlige Lösungen zu $\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} = \frac{1}{Z^2}$?

Aufgabe W4:
Bearbeiten Sie nochmal die Aufgabe 43 auf Blatt 9, diesmal mit Hilfe von Satz 6.8.

Aufgabe W5:
Für welche Zahlen Primzahlen p gibt es eine Zahl n sodass $\phi(n) = 2p$?

Dr. O. Cooley · Geom. 235 ·Tel. (040) 42838-5126 · oliver.cooley@math.uni-hamburg.de