

Kapitel 0: Die natürlichen Zahlen

Hinweis: In diesem Kurs wird 0 als natürliche Zahl betrachtet.

Die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{N}$.

Wir definieren $\mathbb{N}^+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Wir „wissen“, dass $\mathbb{N}$ aus $0, 1, 2, \dots$ besteht

Fragen: Was heisst „0“?

was heisst „1“?

was heisst „2“?

was heisst „...“?

wie können wir $\mathbb{N}$ axiomatisch beschreiben?

Die Peanoaxiome

Menge
„aufbauen“

(P₁) Es gibt ein Element in $\mathbb{N}$ namens „0“. (insbesondere ist $\mathbb{N}$ nicht leer)

(P₂) Jedes Element $n \in \mathbb{N}$ besitzt einen Nachfolger $n^* \in \mathbb{N}$. (später verwenden wir die Notation „ $n+1$ “)

(P₃) Es gibt kein Element $n \in \mathbb{N}$ mit dem Nachfolger $0 = n^*$.

(P₄) Wenn $n^* = m^*$, dann ist $n = m$. (d.h. die Nachfolgerfunktion $*$ ist injektiv)

(P₅) Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine beliebige Teilmenge mit den Eigenschaften, dass

(i) $0 \in M$

(ii) $\forall n \in M$ gilt $n^* \in M$

Dann ist $M = \mathbb{N}$.

Menge
„einschränken“

Bemerkungen: • (P_5) heißt das

Prinzip der vollständigen Induktion

- die Elemente aus $\mathbb{N}$ nennen wir Zahlen
- Wir haben eine sorgfältige Definition von „ $=$ “ ausgelassen.

Unsere (inoffizielle) Vorstellung ist jetzt also

$$\mathbb{N} = \{0, 0^*, (0^*)^*, \dots\}$$

Abkürzung: $1 := 0^*$

$$2 := 1^* = (0^*)^*$$

$$3 := 2^* = (1^*)^* = ((0^*)^*)^*$$

$\vdots$

Satz 0.1: $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0, \exists m \in \mathbb{N}$ sodass $n = m^*$.

Beweis: Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ die Teilmenge aller Zahlen a sodass
entweder • die Aussage gilt für $n=a$
oder • $a=0$.

Dann ist $0 \in M$

(per Definition)

und wenn $a \in M$, dann ist auch $a^* \in M$

(die Aussage gilt mit $n=a^*$, $m=a$)

also ist $M = \mathbb{N}$

(Axiom (P_5))

und der Satz folgt.

□

Was können wir mit $\mathbb{N}$ machen?

Addition

Def: Wir definieren die binäre Operation $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ rekursiv durch:

$$(A_1) \quad m + 0 := m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$(A_2) \quad m + n^* := (m+n)^* \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Beispiel: $1+1 = 1+0^* = (1+0)^* = 1^* = 2$.

Lemma 0.2: $\forall m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(i) \quad n+1 = n^*$$

$$(ii) \quad 0+n = n+0 = n$$

$$(iii) \quad 1+n = n+1 = n^*$$

$$(iv) \quad m+n = 0 \Rightarrow m=n=0.$$

Beweis: Aufgabe

(Hinweis für (ii) und (iii): Induktion über n .)

(Hinweis für (iv): Satz 0.1)

Was verstehen wir unter $l+m+n$?

Satz 0.3: $\forall l, m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$l + (m+n) = (l+m) + n \quad (\text{diese Eigenschaft heiſst Assoziativität})$$

Beweis-Skizze (Induktionsschritt):

Wenn die Aussage für n gilt, dann gilt

$$\begin{aligned}
 l + (m + n^*) &= l + (m + n)^* & (A_2) \\
 &= (l + (m + n))^* & (A_2) \\
 &= ((l + m) + n)^* & (I.V.) \\
 &= (l + m) + n^* & (A_2)
 \end{aligned}$$

also gilt die Aussage für n^* □

Korollar 0.4: $\forall m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$m + n^* = m^* + n.$$

Beweis: (nicht Induktion!)

$$\begin{aligned}
 m + n^* &= m + (n + 1) & (L0.2(i)) \\
 &= m + (1 + n) & (L0.2(iii)) \\
 &= (m + 1) + n & (S0.3) \\
 &= m^* + n & (L0.2(i))
 \end{aligned}$$
□

Satz 0.5: $\forall m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$m + n = n + m$$

(diese Eigenschaft heisst Kommutativität)

Beweis-Skizze (Induktionsschritt):

Wenn die Aussage für $n = a$ gilt, dann gilt

$$\begin{aligned}
 m + a^* &= (m + a)^* & (A_2) \\
 &= (a + m)^* & (I.V.) \\
 &= (a + m^*) & (A_2) \\
 &= a^* + m & (K0.4)
 \end{aligned}$$

Also gilt die Aussage auch für $n = a^*$ □

Als nächstes zeigen wir, dass die Funktion „ $+n$ “ injektiv ist

Satz 0.6: $\forall l, m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$l+n = m+n \Rightarrow l=m$$

(oder äquivalent: $l \neq m \Rightarrow l+n \neq m+n$)

Beweis-Skizze (Induktionsschritt):

Falls die Aussage für $n=a$ gilt, dann gilt auch die Folgerung

$$l+a^* = m+a^* \Rightarrow (l+a)^* = (m+a)^* \quad (A_2)$$

$$\Rightarrow l+a = m+a \quad (P_4)$$

$$\Rightarrow l = m \quad (I.V.)$$

also gilt die Aussage auch für $n=a^*$ □

Korollar 0.7: $\forall l, m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n+l = n+m \Rightarrow l=m$$

und insbesondere

$$n+m = n \Rightarrow m=0.$$

Beweis: S 0.5 und S 0.6

„insbesondere“ ist $l=0$ mit (A_1) . □

Bemerkung: Das Korollar kann man auch direkt beweisen.

Der folgende Satz ist für viele Beweise sehr nützlich, und auch fundamentale Basis für die Definition der Ordnungsrelation der natürlichen Zahlen.

Satz 0.8: $\forall m, n \in \mathbb{N}$ gilt genau eine der folgenden drei Aussagen:

- (i) $m = n$
- (ii) $\exists! l \in \mathbb{N}^+$ sodass $m = n + l$
- (iii) $\exists! l \in \mathbb{N}^+$ sodass $n = m + l$

Beweis: „höchstens eine“ : Aufgabe
 „mindestens eine“ : nächstes mal.

Multiplikation:

Def: Wir definieren die binäre Operation $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ rekursiv durch:

$$(M_1) \quad m \cdot 0 := 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$(M_2) \quad m \cdot (n^*) := (m \cdot n) + m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$