Department Mathematik
Diskrete Mathematik
Dr. Oliver Cooley

Aufgabe 39 (6 Punkte):
a) Beweisen Sie, dass es für jedes $a \in \mathbb{Z}^\times$ unendlich viele Primzahlen p gibt sodass a ein quadratischer Rest modulo p ist.

b) Beweisen Sie, dass $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow p \equiv 1 \mod 3$.

c) Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen kongruent $1 \mod 3$ gibt.

Aufgabe 40 (3 Punkte):
a) Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen kongruent $5 \mod 6$ gibt.

b) Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen kongruent $1 \mod 6$ gibt.

Aufgabe 41 (3 Punkte):
Zeigen Sie die Unlösbarkeit von $x^7 + 17y^7 + 289z^7 = 0$ in den ganzen Zahlen.

Aufgabe 42 (4 Punkte):
Zeigen Sie für $p = 2, 3, 5$, dass jede ganzzahlige Lösung (x, y, z) der Fermat-Gleichung $X^p + Y^p = Z^p$ die Eigenschaft $p|xyz$ erfüllt.

Aufgabe 43 (6 Punkte):
Welche der folgenden Gleichungen besitzt ganzzahlige Lösungen:

a) $3x^2 - 5y^2 + 7z^2 = 0$.

b) $7x^2 + 11y^2 - 19z^2 = 0$.

c) $8x^2 - 5y^2 - 3z^2 = 0$.

d) $11x^2 - 3y^2 - 41z^2 = 0$.

Dr. O. Cooley · Geom. 235 ·Tel. (040) 42838-5126 · oliver.cooley@math.uni-hamburg.de