Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Department Mathematik
Diskrete Mathematik
Dr. Oliver Cooley

Elementare Zahlentheorie Übungsaufgaben zur Abgabe am 12.12.2012

Aufgabe 34 (5 Punkte):
Berechnen Sie die folgenden Legendre-Symbole:

a) $\left(\frac{1716}{2879}\right)$.
b) $\left(\frac{48}{97}\right)$.
c) $\left(\frac{17}{37}\right)$.
d) $\left(\frac{51}{17}\right)$.

Aufgabe 35 (5 Punkte)
a) Berechnen Sie $\left(\frac{11}{19}\right)$ auf drei verschiedene Weisen.

b) Für welche Primzahlen p ist $\left(\frac{11}{p}\right) = 1$?

Aufgabe 36 (3 Punkte):
Zeigen Sie: Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ hat die Zahl $n = 9a^2 + 3a + 1$ nur Primteiler kongruent 1 modulo 3.

Aufgabe 37 (4 Punkte):
Sei p eine Primzahl und n eine natürliche Zahl. Man zeige: dann gilt

$$(X+1)^n \equiv X^n + 1 \mod p$$

genau dann, wenn n eine p-Potenz ist.

Aufgabe 38 (4 Bonuspunkte):
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl mit Primfaktorzerlegung $\prod_{i=1}^{k} q_i^{\alpha_i}$ und $a \in \mathbb{Z}$. Das *Jacobi-Symbol* ist eine Erweiterung des Legendre-Symbols, definiert durch:

$$\left(\frac{a}{n}\right) := \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{a}{q_i}\right)^{\alpha_i}.$$

a) Beweisen Sie, dass Lemma 5.4 (ii), das Quadratische Reziprozitätsgesetz und die zwei Ergänzungssätze auch für das Jacobi-Symbol gelten.

b) Zeigen Sie aber, dass Lemma 5.4 (i) (das Eulersche Kriterium) nicht unbedingt erfüllt ist.

c) Inwiefern können wir aus dem Wert des Jacobi-Symbols $\left(\frac{a}{n}\right)$ ablesen, ob a ein quadratischer Rest modulo n ist?

Dr. O. Cooley · Geom. 235 ·Tel. (040) 42838-5126 · oliver.cooley@math.uni-hamburg.de