



## Elementare Zahlentheorie Übungsaufgaben zur Abgabe am 5.12.2012

### Aufgabe 29 (6 Punkte):

- Für alle Primzahlen  $p \leq 30$ , bestimmen Sie die kleinste primitive Wurzel modulo  $p$ . Geben Sie auch die Ordnung aller kleineren Zahlen an.
- Bestimmen Sie anhand dieser Beispiele für  $\delta = 1/40$  eine untere Schranke für die in Satz 4.17 benutzte Konstante  $C$ .
- Berechnen Sie eine entsprechende untere Schranke für die in dem Beweis von Satz 4.18 benutzte Zahl  $n_0$ .

### Aufgabe 30 (2+3 Punkte):

- Gesucht ist eine natürliche Zahl  $n$ , die für 5, 7 und 17 gleichzeitig primitive Wurzel ist.
- Zeigen Sie allgemein, dass es zu  $n$  Primzahlen stets eine gemeinsame primitive Wurzel gibt.

### Aufgabe 31 (3 Punkte):

Sei  $p$  eine Primzahl. Zeigen Sie: Hat  $a$  in  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  die Ordnung 3, so hat  $a + 1$  die Ordnung 6.

### Aufgabe 32 (3 Punkte):

Beweisen Sie mit Hilfe des Primzahltests von Brillhart und Selfridge, dass

- $2311 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 \in \mathbb{P}$
- $44101 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 + 1 \in \mathbb{P}$

### Aufgabe 33 (3 Punkte):

Beweisen Sie mit Hilfe des Lucas-Lehmer Tests, dass

- $2^{11} - 1 \notin \mathbb{P}$
- $2^{13} - 1 \in \mathbb{P}$