Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Department Mathematik
Diskrete Mathematik
Dr. Oliver Cooley

Elementare Zahlentheorie Übungsaufgaben zur Abgabe am 7.11.2012

Aufgabe 10 (4 Punkte):
Finden Sie die Primfaktorzerlegung der Zahlen 2012, 9797, 210^{210}, $2^{32}-1$.

Aufgabe 11 (3 Punkte):
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine willkürlich gewählte Zahl mit genau 100 Dezimalstellen eine Primzahl? Geben Sie eine genaue Antwort mit Hilfe der Funktion $\pi(x)$ und auch eine Abschätzung mit Hilfe des Primzahlsatzes.

Aufgabe 12 (3 Punkte):
Zeigen Sie: für jede Zahl $k \in \mathbb{N}^+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ sodass die k aufeinander folgenden Zahlen $n, n+1, n+2, \ldots, n+k-1$ alle nicht prim sind.
Tipp: Wählen Sie n, sodass $2|n$, $3|n+1$, $4|n+2\ldots$.

Aufgabe 13 (2+2 Punkte):
Folgern Sie aus dem Primzahlsatz:

a) Es gibt keine reellen Polynome $p(x), q(x)$ mit $\pi(n) = p(n)/q(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Für $a, b > 0$ gilt $\lim_{x\to\infty} \pi(ax)/\pi(bx) = a/b$.

Aufgabe 14 (2+2 Bonuspunkte):
a) Beweisen Sie, dass eine ungerade vollkommene Zahl n eine Primfaktorzerlegung der Form $n = r^\alpha \prod q_i^{2\beta_i}$ hat, wobei $r, q_1, q_2, \ldots$ paarweise verschiedene ungerade Primzahlen sind und $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots \in \mathbb{N}$.

b) Folgern Sie, dass eine ungerade vollkommene Zahl niemals durch 105 teilbar sein kann.

Dr. O. Cooley · Geom. 235 ·Tel. (040) 42838-5126 · oliver.cooley@math.uni-hamburg.de