Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Department Mathematik
Diskrete Mathematik
Dr. Oliver Cooley

Elementare Zahlentheorie Übungsaufgaben zur Abgabe am 31.10.2012

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte):
Finden Sie eine ganzzahlige Lösung zu folgenden Gleichungen, beziehungsweise beweisen Sie, dass keine ganzzahlige Lösung existiert.

a) $21X - 77Y = 14$

b) $-45X + 12Y = -8$

c) $1776X + 245Y = 1$

Aufgabe 6 (1+3 Punkte):
Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, und sei $(a_1, \ldots, a_n)$ die größte Zahl $d \in \mathbb{N}^+$ sodass $d|a_i$ für alle $i \leq n$.

a) Beweisen Sie, dass $(a_1, \ldots, a_n) = ((a_1, a_2), a_3, \ldots, a_n)$.

b) Folgern Sie, dass $a_1X_1 + \ldots + a_nX_n = c$ eine ganzzahlige Lösung hat $\Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n)|c$.
Tipp: Induktion über n.

Aufgabe 7 (3 Punkte):
Seien $m, n \in \mathbb{N}^+$ und $m + n \geq 3$. Beweisen Sie, dass $n^4 + 4m^4$ keine Primzahl ist.
Tipp: Zerlegen Sie das Polynom $X^4 + 4Y^4$.

Aufgabe 8 (1+2+2 Punkte):
a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $7|2^{3n} - 1$.

b) Eine Primzahl der Form $p = 2^n - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ heisst *Mersennesche Primzahl*; beachte die zur Zeit größte bekannte Primzahl ist $2^{43.112.609} - 1$ (siehe z.B. www.mersenne.org). Zeigen Sie: Ist p eine Mersennesche Primzahl, so folgt n ist eine Primzahl.

c) Eine Primzahl der Form $p = 2^n + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ heisst *Fermatsche Primzahl*. Zeigen Sie: Ist p eine Fermatsche Primzahl, so folgt $n = 2^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 9 (3 Bonuspunkte):
Zeigen Sie, dass das Produkt von k aufeinanderfolgenden Zahlen durch $k!$ teilbar ist.

Dr. O. Cooley · Geom. 235 ·Tel. (040) 42838-5126 · oliver.cooley@math.uni-hamburg.de