Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Department Mathematik
Diskrete Mathematik
Dr. Oliver Cooley

**Elementare Zahlentheorie Übungsaufgaben - dieses Blatt muss nicht abgegeben werden und wird nicht korrigiert.**

**Aufgabe 54 (4 Punkte):**
Beweisen Sie Lemma 7.25, d.h.:

a) Für $K$ ein quadratischer Zahlkörper oder $K = \mathbb{Q}$ und für jede aufsteigende Kette $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{O}_K$ von Idealen in $\mathcal{O}_K$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $A_n = A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots$.

b) Jedes Ideal $A \neq \mathcal{O}_K$ in $\mathcal{O}_K$ ist in einem Maximalideal enthalten.

**Aufgabe 55 (4 Punkte):**
Für folgende Körper $K$ und Elemente $a \in \mathcal{O}_K$ finden Sie (mit Begründung) alle Zerlegungen $a = q_1 \cdot \ldots \cdot q_n$ (bis auf Einheiten) in irreduzible Elemente von $\mathcal{O}_K$. Welche der irreduziblen Elemente sind auch prim?

a) $K = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, $a = 15 + 7\sqrt{5}$

b) $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-10}]$, $a = 14$;

c) $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-13}]$, $a = 9 - 3\sqrt{-13}$.

**Aufgabe 56 (6 Punkte):**
Für folgende Körper $K$ und Ideale $A$ in $\mathcal{O}_K$ finden Sie (mit Begründung) eine Zerlegung $A = P_1 \cdot \ldots \cdot P_n$ in Primideale.

a) $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $A =< 2 + 2\sqrt{2} >$;

b) $K = \mathbb{Q}[i]$, $A =< 4 + 6i\ ,\ 2i - 3 >$;

c) $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$, $A =< 23 >$;

d) $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$, $A =< 1 + \sqrt{-5} >< 1 - \sqrt{-5} >$.

**Aufgabe 57 (4 Punkte):**
a) Zeigen Sie für alle Ideale $A, B \subseteq \mathcal{O}_K$, dass

$$(A + B)(A \cap B) \subseteq AB \subseteq A \cap B.$$

b) Folgern Sie daraus Lemma 7.23.

**Aufgabe 58 (3 Punkte):**
Sei $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ und $I =< 2\ ,\ 1 + \sqrt{-5} >$. Beweisen Sie, dass $I$ kein Hauptideal ist.
*Hinweis: Angenommen $I =< x >$, welche Eigenschaften hat $N(x)$?*


Dr. O. Cooley · Geom. 235 ·Tel. (040) 42838-5126 · oliver.cooley@math.uni-hamburg.de