Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Department Mathematik
Diskrete Mathematik
Dr. Oliver Cooley

Elementare Zahlentheorie Übungsaufgaben zur Abgabe am 23.1.2013

Aufgabe 49 (2 Punkte):
Sei $0, 1 \neq d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei, $\alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ mit Grad 2 und $m(X)$ das Minimalpolynom von α. Beweisen Sie, dass $m(X) = X^2 - Sp(X) + N(X)$.

Aufgabe 50 (3 Punkte):
Zeigen Sie: Ist $d > 0$ durch eine Primzahl $p \equiv 3 \mod 4$ teilbar, dann hat jede Einheit von $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ die Norm 1.

Aufgabe 51 (5 Punkte):
Bestimmen Sie (mit Begründung) die Grundeinheiten von $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{d}]}$ mit

a) $d = 3$;

b) $d = 7$;

c) $d = 21$.

Aufgabe 52 (4 Punkte):
Wir betrachten den Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
a) Beweisen Sie, dass es unendlich viele Zahlen $a \in \mathbb{N}$ gibt, sodass ein $b \in \mathbb{Z}$ existiert mit $N(a + b\sqrt{2}) = -a$.

b) Folgern Sie daraus, dass es unendlich viele Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $1 + 2 + \ldots + n$ eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 53 (4 Punkte):
Wir betrachten den algebraischen Zahlkörper $K = \mathbb{Q}[10^{1/3}]$ und das Element $\alpha = 1 + 10^{1/3} + 10^{2/3}$.

a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α.

b) Beweisen Sie, dass $\mathcal{O}_K \neq \mathbb{Z}[10^{1/3}]$.

Dr. O. Cooley · Geom. 235 ·Tel. (040) 42838-5126 · oliver.cooley@math.uni-hamburg.de