Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Department Mathematik
Diskrete Mathematik
Dr. Oliver Cooley

Elementare Zahlentheorie Übungsaufgaben zur Abgabe am 24.10.2012

Aufgabe 1 (6 Punkte):
Leiten Sie nur unter Verwendung der Peano Axiome und den in der Vorlesung gegebenen Definitionen für die Addition und Multiplikation folgende Identitäten von natürlichen Zahlen her.

a) $2 + 2 = 4$

b) $3 \cdot 3 = 9$

c) $(1 + 3) \cdot 2 = 8$

Aufgabe 2 (4 Punkte):
Welche der Peano Axiome gelten für die folgenden Mengen N versehen mit einer Nachfolgerfunktion.

a) Sei $N = \{0\}$ versehen mit der Nachfolgerfunktion $^* : N \to N$ gegeben durch $0 \mapsto 0$.

b) Sei $N = \{-1, -2, -3, \ldots\}$ versehen mit der Nachfolgerfunktion $^* : N \to N$ gegeben durch $n \mapsto n - 1$.

Aufgabe 3 (9 Punkte):
Weisen Sie nur unter Verwendung der Peano Axiome und den in der Vorlesung gegebenen Eigenschaften der Addition folgende Rechenregeln für die Multiplikation natürlicher Zahlen her.

a) (Distributivität) Für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt die Identität $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

b) (Kommutativität) Für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt die Identität $xy = yx$.

c) (Kürzungsregel) Gilt für $x, y, z \in \mathbb{N}$ mit $z \neq 0$ die Identität $xz = yz$, so folgt $x = y$.

Aufgabe 4 (3 Bonuspunkte):
Ein System von Axiomen heisst unabhängig, falls kein Axiom aus den anderen hergeleitet werden kann. Zeigen Sie, dass die Peano Axiome unabhängig sind (Tip: Finde weitere Konstruktionen wie in Aufgabe 2).

Dr. O. Cooley · Geom. 235 ·Tel. (040) 42838-5126 · oliver.cooley@math.uni-hamburg.de