Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Department Mathematik
Diskrete Mathematik
Dr. Oliver Cooley

Elementare Zahlentheorie Aufgaben für einen zusätzlichen Leistungspunkt

Aufgabe 1:
Beweisen Sie mit Hilfe des Primzahlsatzes: für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl n_0 sodass für alle $n \geq n_0$ die Menge $\{n, n+1, n+2, \ldots, \lfloor (1+\varepsilon)n \rfloor\}$ mindestens eine Primzahl enthält.

Aufgabe 2:
a) Beweisen Sie, dass eine primitive Wurzel modulo p auch ein quadratischer Nichtrest modulo p ist.

b) Zeigen Sie, dass es Primzahlen p gibt, sodass *jeder* quadratischer Nichtrest modulo p eine primitive Wurzel modulo p ist.

c) Bestimmen Sie welche Primzahlen p diese Eigenschaft erfüllen.

Aufgabe 3:
Der Satz von Dirichlet besagt, dass es für alle teilerfremden Zahlen $k, \ell \in \mathbb{N}^+$ unendlich viele Primzahlen p gibt, sodass $p \equiv \ell \mod k$. Verwenden Sie ohne Beweis den Satz von Dirichlet um folgende Aussage zu beweisen:

Sei $a \in \mathbb{N}$ keine Quadratzahl. Beweisen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen p gibt sodass $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$.

Aufgabe 4:
Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ und $a^2 + b^2 = c^2$. Zeigen Sie:
a) $12 | ab$;

b) $60 | abc$.

c) Bestimmen Sie die Tripel (a, b, c) mit $a, b, c \in \mathbb{N}^+$ und mit kleinstem c, sodass $a^2+b^2 = c^4$ bzw $a^2 + b^2 = c^8$.

Aufgabe 5:
Seien $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ alle Primzahlen in aufsteigender Reihenfolge. Beweisen Sie, dass $\sum_{i=1}^{n} 1/p_i$ divergiert, wenn $n \to \infty$.

Aufgabe 6:
Seien $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{P}$ und $N \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass die Anzahl der natürlichen Zahlen aus $1, \ldots, N$, die als Produkt von Potenzen von $p_1, \ldots, p_n$ dargestellt werden können, höchstens $\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{\log N}{\log p_i}\right)$ ist.

b) Folgern Sie daraus, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Dr. O. Cooley · Geom. 235 ·Tel. (040) 42838-5126 · oliver.cooley@math.uni-hamburg.de

Aufgabe 7:
Sei p eine ungerade Primzahl. Beweisen Sie

$$\exists x, y \in \mathbb{N} \text{ sodass } p = x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow p \equiv 1, 3 \mod 8.$$

Aufgabe 8:
Bestimmen Sie mit Hilfe des Primzahlsatzes die asymptotische Größe der n-ten Primzahl.

Aufgabe 9:
Wir betrachten den Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-26}]$.
a) Zeigen Sie, dass die Elemente 3 und $1 \pm \sqrt{-26}$ irreduzibel sind.
b) Betrachten Sie das Ideal $\{3a + b(1 + \sqrt{-26}) : a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{-26}]\}$ und beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-26}]$ kein Hauptidealring ist.
c) Für welche Zahlen $n \in \mathbb{N}^+$ kann man ähnlich beweisen, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$ kein Hauptidealring ist?

Aufgabe 10:
Bestimmen Sie alle Zahlen $n \in \mathbb{N}^+$ mit:
a) $\phi(n) = 8$;
b) $\phi(n) = 16$;
c) $\phi(n) = 256$.