Topologie
Sommer 2009

Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michael Carl

9. Übungsblatt

Aufgabe 1. (**Eindeutigkeit der Hochhebung**) Sei $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, Z wegzusammenhängend und $f_1, f_2 : (Z, z_0) \to (Y, y_0)$ stetig mit $p \circ f_1 = p \circ f_2$. Zeige: $f_1 = f_2$.

(2 Punkte)

Aufgabe 2. (**Basiswechsel**) Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung und $f : Z \to X$ stetig. Zeige: Das Faserprodukt

$$Z \times_X Y := \{(z, y) \mid \ f(z) = p(y)\} \subset Z \times Y$$

mit der Projektion $q : Z \times_X Y \to Z, (z, y) \mapsto z$ ist eine Überlagerung von Z.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (**Cayley-Komplex**) Sei $G := \langle g_1, ..., g_n\rangle$ die freie Gruppe mit n Erzeugern $g_1, ..., g_n$ und X der eindimensionale simpliziale Komplex mit Vertexmenge $X^{[0]} = G$ und 1-Zellen $X^{[1]} = \big\{[g, gg_i] \mid \ g \in X^{[0]}, i \in \{1, ..., n\}\big\}$. Zeige: Die natürliche Fortsetzung der G-Wirkung auf $X^{[0]}$ macht $X \to X/G$ zu einer Überlagerung eines Raumes mit Fundamentalgruppe $\pi_1(X/G) \cong G$. **Zusatzfrage**: Wie kann ein solches X für Gruppen $G := \langle g_1, ..., g_n|R\rangle$ mit Relationen $R \subset \langle g_1, ..., g_n\rangle$ definiert werden? (Hinweis: Blatt 8, Aufgabe 4.)

(4+2 Punkte)

Aufgabe 4. (**Orientierungsüberlagerung**) Zu einer nicht-orientierbaren geschlossenen Fläche vom Geschlecht $g + 1$ konstruiere eine zweiblättrige Überlagerung p_g durch eine orientierte Fläche vom Geschlecht g:

$$p_g : (T^2)^{\#g} \to \mathbb{RP}^{\#(g+1)}.$$

Hinweis: Für $g = 1$ betrachte (vgl. Blatt 4) die durch $(x, y) \mapsto (x + \frac{1}{2}, -y)$ erzeugte freie $\mathbb{Z}_2$-Wirkung auf $T^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Konstruiere damit eine $\mathbb{Z}_2$-Wirkung auf der Darstellung von $(T^2)^{\#g}$ als Verklebung von $T^2 \setminus \big(\mathbb{Z}_2 \cdot \coprod_{i=1}^{g-1} B_\epsilon(\epsilon, \frac{i}{g})\big)$ mit $g-1$ Zylindern $\coprod_{i=1}^{g-1}[0, 1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ längs der $2g-2$ Randkomponenten.

(4 Punkte)