Topologie
 Prof. Dr. Bernd Siebert
Sommer 2009
 Dr. Michael Carl

8. Übungsblatt

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe, $T \subset G$, $N(T) := \bigcap_{N \supset T, N \subset G \text{ normal}} N$ der normale Abschluss von T und $\pi : G \twoheadrightarrow G/N(T)$, $\quad g \mapsto gN(T)$. Zeige: Jeder Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to G'$ mit $\varphi(T) = \{e\}$ faktorisiert eindeutig über $G/N(T)$, d.h. es gibt einen eindeutigen Homomorphismus $\varphi' : G/N(T) \to G'$ mit $\varphi' \circ \pi = \varphi$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Seien M, N Mannigfaltigkeiten der Dimension $n > 2$. Zeige:

$$\pi_1(M \# N) \cong \pi_1(M) * \pi_1(N).$$

(2 Punkte)

Aufgabe 3. (Fundamentalgruppen geschlossener Flächen I)
Sei $B_\epsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \ ||y - x|| < \epsilon\} \subset \mathbb{R}^2$ die offene Kreisscheibe vom Radius $\epsilon < \frac{1}{2}$ um x und seien $\iota : \overline{B_\epsilon(0)} \hookrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 =: T^2$, $\iota_g : \coprod_{i=1}^{g} B_\epsilon(\epsilon, i) \hookrightarrow (\mathbb{R}^2)^+ =: S^2$ die induzierten Einbettungen in T^2 bzw S^2. Zeige:

a) $\bigvee_{i=1}^{g-1} S^1$ ist Deformationsretrakt von $S^2 \setminus \operatorname{im} \iota_g$ für $g \geq 2$.

b) $S^1 \vee S^1$ ist Deformationsretrakt von $T^2 \setminus \iota(B_\epsilon(0))$.

Zeige weiter, dass das Bild von $(\iota|_{\partial B_\epsilon(0)})_* : \pi_1(\partial B_\epsilon(0)) \to \pi_1(T^2 \setminus \iota(B_\epsilon(0)))$ von $aba^{-1}b^{-1}$ erzeugt wird (bezüglich der natürlichen Erzeuger a, b von $\pi_1(T^2 \setminus \iota(B_\epsilon(0))))$ und folgere so, dass für die orientierbaren geschlossenen Flächen $\Sigma_g := S^2 \# (\#_{i=1}^{g} T^2)$ gilt:

$$\pi_1(\Sigma_g) = \left\langle a_1, b_1, ..., a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \right\rangle \qquad (1)$$

(6 Punkte)

Aufgabe 4. (Fundamentalgruppen geschlossener Flächen II)
Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, $\alpha : \partial D \to X$ stetig und $Y := X \amalg_\alpha D$ die Anheftung einer 2-Zelle $D := \overline{B_\epsilon(0)}$. Zeige:

$$\pi_1(Y, x) \cong \pi_1(X, x)/N([\alpha]) \quad \text{für ein } x \in \operatorname{im} \alpha.$$

Folgere so die Darstellung (1) aus der polyedrischen Normalform von Σ_g. (Hinweis: Die Normalform liefert eine Zerlegung $\Sigma_g \simeq \left(\bigvee_{i=1}^{2g} S^1\right) \amalg_\alpha D$.)

(4 Punkte)