Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michael Carl

7. Übungsblatt

Aufgabe 1. Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und seien $h_1, h_2 : [0,1] \to X$ Wege von $h_i(0) = x_0$ nach $h_i(1) = x_1$. Zeige:

a) Die zugehörigen Basispunktwechsel $\beta_{h_i} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1) : [\alpha] \mapsto [h_i^- * \alpha * h_i]$ sind konjugiert (d.h. es gibt ein $\gamma \in \pi_1(X, x_1)$, so dass $\beta_{h_1}(\alpha) = \gamma * \beta_{h_2}(\alpha) * \gamma^{-1}$ für alle $\alpha \in \pi_1(X, x_1)$).

b) $\pi_1(X)$ ist genau dann abelsch, wenn alle Basispunktwechsel β_h nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges h abhängen.

c) ***-Aufgabe**. $\pi_1(X)$ ist außerdem genau dann abelsch, wenn die den Basispunkt vergessende Abbildung $\phi : \pi_1(X, x_0) \to [S^1, X]$ injektiv ist.

(4+2 Punkte)

Aufgabe 2. Zeige, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, e)$ einer topologischen Gruppe $(G, \cdot)$ abelsch ist. (Hinweis: Wähle zwei Repräsentanten α_1, α_2 von $\pi_1(G, e)$ und betrachte die Einschränkung der Abbildung $H : [0,1]^2 \to G, (t_1, t_2) \mapsto \alpha_1(t_1) \cdot \alpha_2(t_2)$ auf den Rand $\partial([0,1]^2)$.)

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $A \subset X$ ein Deformationsretrakt eines topologischen Raumes X, d.h. es gibt eine Homotopie der Identität id_X auf eine Retraktion ρ (d.h. eine Abbildung $\rho : X \to A$ mit $\rho|_A = \mathrm{id}_A$). Sei $a \in A$. Zeige, dass $\rho_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$ ein Isomorphismus ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Berechne mittels Aufgabe 3 die Fundamentalgruppen folgender topologischer Räume:

a) des Möbiusbandes.

b) des Kegels CX über einem topologischen Raum X.

(4 Punkte)