Topologie | Prof. Dr. Bernd Siebert
Sommer 2009 | Dr. Michael Carl

5. Übungsblatt

Aufgabe 1. Überprüfe, ob folgende topologische Räume bzw. Konstruktionen im Allgemeinen berandete Mannigfaltigkeiten definieren, und begründe die verneinenden Antworten:

a) $\left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$.

b) $X \backslash \varphi^{-1}(B)$, wobei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte und $B \subset \varphi(U)$ eine offene Kugel ist.

c) Der Kegel $CX := X \times [0,1]/X \times \{1\}$ über einer topologischen Mannigfaltigkeit X.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Sei P ein endlicher, n-dimensionaler simplizialer Polyeder mit Ecken $V := \{v_1, ..., v_m\}$. Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi : V \to \mathbb{R}^{2n+1}, v_i \mapsto (i, i^2, ..., i^{2n+1})$$

durch die affinen Fortsetzungen

$$\widetilde{\varphi}|_\sigma : \sigma \to \mathbb{R}^{2n+1}, \sum_{v \in \sigma \cap V} \lambda_v v \mapsto \sum_{v \in \sigma \cap V} \lambda_v \varphi(v)$$

für alle $\sigma \in P$ eine Einbettung $\widetilde{\varphi} : |P| \to \mathbb{R}^{2n+1}$ definiert. (Hinweis: Folgere für $m > 2n+1$ mit Hilfe der Vandermonde-Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1^1 & t_2^1 & \cdots & t_k^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{k-1} & t_2^{k-1} & \cdots & t_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le k} (t_j - t_i),$$

dass $(2n+2)$-elementige Teilmengen von $\varphi(V)$ affin unabhängig sind.)

(5 Punkte)

Aufgabe 3. Klassifiziere die geschlossenen, eindimensionalen, zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten. (Hinweis: Konstruiere zunächst eine Triangulierung.)

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Klassifiziere alle geschlossenen Flächen, die aus paarweiser Identifizierung von Kanten des Quadrats $[0,1] \times [0,1]$ entstehen.

(4 Punkte)