Topologie I
Sommer 2009

Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michael Carl

2. Übungsblatt

Aufgabe 1. Verallgemeinere den Zwischenwertsatz auf Funktionen $X \to \mathbb{R}$ für beliebige zusammenhängende Räume X.

(2 Punkte)

Aufgabe 2. Bestimme die Zusammenhangskomponenten folgender Räume:

i) $\mathbb{Q}$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Teilraumtopologie
ii) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit der von $M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ induzierten Teilraumtopologie. Hinweis: Nutze (ohne Beweis) die Surjektivität von

$$M(n, \mathbb{R}) \times M(n, \mathbb{R}) \to \{g \in M(n, \mathbb{R}) | \det g > 0\} : (g, h) \mapsto \exp(g) \exp(h).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \ ||x|| = 1\}$ versehen mit der Teilraumtopologie. Zeige: S^1 ist zu keinem Teilraum von $\mathbb{R}$ homöomorph. (Hinweis: Betrachte $S^1 \setminus \{e_1\}$.)

(2 Punkte)

Aufgabe 4. (Einpunktkompaktifizierung)
Sei X ein topologischer Raum. Betrachte die disjunkte Vereinigung $X^+ := X \coprod \{\infty\}$ und versehe X^+ mit der Topologie, die durch offene Teilmengen von X und Komplemente kompakter Teilmengen aus X erzeugt wird.

Zeige: Ist X lokal kompakt und Hausdorffsch, so ist die natürliche Abbildung $j : X \to X^+$ eine Einbettung (d.h. j induziert einen Homöomorphismus $X \to j(X)$) und X^+ ein kompakter Hausdoffraum.

Die letzten beiden Eigenschaften charakterisieren X^+ eindeutig bis auf Homöomorphismus. Dies braucht nicht gezeigt zu werden, aber folgere durch Angabe einer geeigneten Einbettung, dass $(\mathbb{R}^n)^+ \cong S^n$.

(4 Punkte)

***Aufgabe. (Cantorsches Diskontinuum)** Sei $X_0 = [0,1]$ und $X_{j+1} \subset X_j$ entstehe iterativ aus X_j durch Entfernen des offenen mittleren Drittels jedes Intervalls, d.h.

$$X_j = \bigcup_{0 \leq i < 2^j} [a_i, a_i + \ell_i] \mapsto \bigcup_{0 \leq i < 2^j} [a_i, a_i + \frac{\ell_i}{3}] \cup [a_i + \frac{2\ell_i}{3}, a_i + \ell_i] = X_{j+1}.$$

Konstruiere eine stetige Bijektion

$$\varphi : \prod_{i=0}^{\infty} \{0,1\} \to X_\infty.$$

Bemerkung: Es folgt dann, dass φ ein Homöomorphismus ist.

(4 Punkte)