Topologie
Sommer 2009

Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michael Carl

11. Übungsblatt

Aufgabe 1. (Homologie der 2-Sphäre) Sei Δ_3 der 3-dimensionale Standardsimplex. Berechne $H_q^\Delta(\partial\Delta_3)$ für $0 \leq q \leq 2$ durch Angabe von Isomorphismen zu $\mathbb{Z}^{b_q}$ für geeignete Zahlen $b_q \in \mathbb{N}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $K = (E, S)$ ein simplizialer Komplex mit Eckenmenge E und Simplexmenge $S \subset \mathcal{P}(E)$. $K' = (E, S \setminus \{\sigma\})$ enstehe durch Entfernen eines $(q+1)$-Simplexes σ. Zeige: $H_q^\Delta(K) = H_q^\Delta(K')/\langle\partial\sigma\rangle$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $X = \coprod X_i$ eine disjunkte Vereinigung topologischer Räume X_i. Zeige: $C_q(X) = \bigoplus C_q(X_i)$ und ∂ erhält diese Zerlegung, so dass $H_q(X) = \bigoplus H_q(X_i)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Finde die Automorphismen des exakten Kettenkomplexes

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

mit $\iota(a) := (a, 0)$ und $p(a, b) := b$. Finde weiter zu jedem Kettenautomorphismus eine Homotopie zur Identität, d.h. finde Homomorphismen J, P (im Diagramm durch gepunkteten Pfeile dargestellt) mit $\iota \circ J + P \circ p = f - \mathrm{id}_{\mathbb{Z}^2}$, falls f der mittlere Pfeil des Kettenautomorphismus ist.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dl, dotted, "J"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "P"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\iota"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "p"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(4 Punkte)

Präsenz- und Zusatzaufgaben

- Sei K ein n-dimensionaler simplizialer Komplex. Zeige: $H_q^\Delta(K)$ hängt nur von dem Unterkomplex $\bigcup_{i\leq q+1} K^{[i]} \subset K$ ab.

- Sei $p_k : S^1 \to S^1 : e^{i\varphi} \mapsto e^{ik\varphi}$ die k-blättige Überlagerung von S^1. Zeige: $H_1(p) = k \cdot \mathrm{id}_{H_1(S^1)}$.

- **(Einhängung und Homologie von Sphären)** Sei $K = (E, S)$ ein zusammenhängender simplizialer Komplex und $\Sigma K := (E \amalg \{p, q\}, S \cup \bigcup_{\sigma\in S} \Sigma\sigma)$ der Doppelkegel über K, wobei $\Sigma\{v_0, ..., v_n\} = \{\{v_0, ..., v_n, p\}, \{v_0, ..., v_n, q\}\}$. Definiere entsprechend Σ auf C_n durch Fortsetzung von $\Sigma[v_0, ..., v_n] := [v_0, ..., v_n, p] - [v_0, ..., v_n, q]$. Zeige: Ist $c \in Z_q(X)$, so ist $\Sigma c \in Z_{q+1}(X)$ und analog für Ränder. Folgere, dass $H_{q+1}^\Delta(SX) = H_q^\Delta(X)$ und berechne damit $H_q(S^n)$.

- **(Orientierbarkeit)** Sei K eine angeordnete Triangulierung einer geschlossenen zusammenhängenden Fläche. Zeige: Ein 2-Zykel $\sum n_i\sigma_i \in C_2K$ hat konstante $|n_i|$. Folgere, dass entweder $H_2^\Delta(K) = 0$ oder $H_2^\Delta(K) = \mathbb{Z}$.