Algebra I
Sommer 2010

Prof. Dr. B. Siebert
Dr. Michael Carl

Präsenzübungen I

Aufgabe 1. Sei G eine endliche Untergruppe von $GL(2,k)$ und $g \in G$. Welche Eigenwerte und welche Ordnung kann g haben, falls $k = \mathbb{C}$ bzw. $k = \mathbb{Z}$?

Aufgabe 2. Eine Gruppe der Ordnung 33 wirke auf einer Menge mit 16 Elementen. Hat eine solche Wirkung einen Fixpunkt?

Aufgabe 3. Seien $A, B \subset G$ zwei endliche G-Untergruppen. Wie viele Elemente enthält der Schnitt $A \cap B$, wenn die Ordnungen von A und B teilerfremd sind?

Aufgabe 4. Sei G eine endliche Gruppe. Wie viele Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{Z}$ nach G gibt es? (Hinweis: Betrachte ev_1: $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G) \to G,\ \varphi \mapsto \varphi(1)$.)

Lösungshinweise

1. Ist $k = \mathbb{C}$ und g in Jordan Normalform, so folgt aus $g^n = 1$, dass $z^n = 1$ für jeden Eigenwert z von g, also sind die Eigenwerte Einheitswurzeln und alle Ordnungen sind möglich. Ist $k = \mathbb{Z}$, so gilt zusätzlich $\mathrm{tr}(g) \in \mathbb{Z}$ und einfache Eigenwerte sind komplex konjugiert, also $2\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{Z}$ oder $z^2 \in \mathbb{Z}$, also $z \in \langle \exp(2\pi i/6)\rangle \cong \mathbb{Z}/6$ oder $z \in \langle \exp(2\pi i/4)\rangle \cong \mathbb{Z}/4$. Somit $\mathrm{ord}(g) \in \{1,2,3,4,6\}$. In der Tat sind
$$a := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
mögliche Generatoren der Ordnung 4 bzw. 6; es gilt sogar
$$SL(2,\mathbb{Z}) = \left\langle a, b \mid a^3 = b^2 \right\rangle$$

2. Zerlegung von X in die G-Bahnen liefert
$$|X| = |\coprod_{[x]\in X/G} G.x| = \sum_{[x]\in X/G} |G.x| = \sum_{[x]\in X/G} |G/G_x| = \sum_{[x]\in X/G} \frac{|G|}{|G_x|}.$$
Für $|X| = 16$ und $|G| = 33$, also $|G_x| \in \{1,3,11,33\}$ erhält man insbesondere $16 \in 33\mathbb{N} + 11\mathbb{N} + 3\mathbb{N} + |X^G|$, also $|X^G| \geq 1$.

3. Sei $g \in A \cap B$, dann ist $\langle g\rangle$ Untergruppe von A und B, also teilt $|\langle g\rangle|$ sowohl $|A|$ als auch $|B|$, also $g = 1$.

4. ev_1 ist bijektiv, denn $\mathrm{ev}_1^{-1}(g) = m \mapsto g^m$.