Lösungen zu Blatt 6

Aufgabe 1. Sei $G := S_5$, also $|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, und s_p die Anzahl der p-Sylowgruppen.

1. Die 5-Sylowgruppen sind die von einem 5-Zykel $g := (i_1, \ldots, i_5)$ erzeugten zyklischen Gruppen, die je 4 5-Zykel enthalten. Insgesamt gibt es $|G|/|G_g| = 120/5 = 24$ 5-Zykel, also $s_5 = 6$.
2. Die 3-Sylows werden von 3-Zykeln erzeugt, wie in 1. folgt $s_3 = 10$.
3. Beispiel für eine 2-Sylow liefert $\langle (12), (34), (13)(24) \rangle$, mit $s_2 | 3 \cdot 5$ folgt $s_2 = 15$.

Aufgabe 2. Folgt direkt aus Lemma 6.9: $G \cong \mathbb{Z}/7 \times \mathbb{Z}/11 \times \mathbb{Z}/13 \cong \mathbb{Z}/1001$.

Aufgabe 3. H wirkt durch Konjugation auf der Menge S der p-Sylows von H, also auch G, da H normal in G ist, d.h. die Konjugationsklassen von $P \in S$ unter H und G sind identisch:

$$\forall g \in G \; \exists h \in H : \quad gPg^{-1} = hPh^{-1}.$$

Damit ist $h^{-1}gP(h^{-1}g)^{-1} = P$, also $h^{-1}g \in N_G(P)$ und

$$g \in HN_G(P).$$

Aufgabe 4. Sei G einfach mit $|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$. Die Anzahl s_p der p-Sylowgruppen muss ≥ 2 sein für alle $p \in \{2, 3, 11\}$, denn nach den Sylowsätzen ist $s_p \geq 1$ und $s_p = 1$ genau dann, wenn die p-Sylow normal ist, also $s_{11} \geq 12, s_3 \geq 4, s_2 \geq 3$ (wieder nach den Sylowsätzen). Das liefert mindestens 120 Elemente der Ordnung 11, mindestens 8 der Ordnung 3, bleiben nur $|G| - 120 - 8 = 4$ für die Ordnung 2, Widerspruch.