1 Lösungen

1.1 Aufgabe 1

Es operiere im folgenden $G = S_n$ durch Konjugation auf sich selbst. Sei $\sigma \in S_n$, wir wollen $|G_\sigma|$ berechnen, also wieviele Permutationen σ fest lassen. Sei $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_\ell$ die Zykelzerlegung von σ mit $\mathrm{ord}(\sigma_i) = n_i$ und $n_i \leq n_{i+1}$. Definiere außerdem $p = p_\sigma := (n_1, n_2, \ldots, n_\ell)$.
Ist nun $\pi \in G_\sigma$, so ist $\pi\sigma_i\pi^{-1} = \sigma_j$ mit $n_i = n_j$, d.h. π permutiert in der Zykelzerlegung die k-Zykel, dafür gibt es $c_k(p)!$ Möglichkeiten.
Die Darstellung eines k-Zykels als $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ist nur eindeutig bis auf den ersten Eintrag, es gibt also k Möglichkeiten einen k-Zykel zu schreiben, für $c_k(p)$ verschiedene k-Zykel also $k^{c_k(p)}$ Möglichkeiten.
Insgesamt haben wir $|G_\sigma| = \prod_{k=1}^n c_k(p)!k^{c_k(p)}$.
Nach Aufgabe 2 Blatt 2 gibt es eine Bijektion $f : G/_\sim \to P_n$. Mit Hilfe von f lässt sich G schreiben als die disjunkte Vereinigung

$$G = \bigcup_{p\in P_n} f^{-1}(p)$$

Da die Vereinigung disjunkt ist und f eine Bijektion, gilt nach der Bahnformel

$$n! = |G| = \sum_{[\sigma]\in G/_\sim} \frac{|G|}{|G_\sigma|} = \sum_{[\sigma]\in G/_\sim} |G\sigma| = \sum_{p\in P_n} f^{-1}(p) \tag{1}$$

Es ist nun für $\sigma \in f^{-1}(p)$

$$\left|f^{-1}(p)\right| = |G\sigma| = \frac{|G|}{|G_\sigma|} = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n c_k(p)!k^{c_k(p)}}$$

Setzt man dies nun in (1) ein und teilt die Gleichung durch $n!$ erhält man

$$1 = \sum_{p\in P_n} \frac{1}{\prod_{k=1}^n c_k(p)!k^{c_k(p)}}$$

1.2 Aufgabe 2

Da D_n semidirektes Produkt von $\langle r \rangle = \{r^0, r^1, \ldots, r^{n-1}\}$ und $\langle s \rangle = \{s^0, s^1\}$ ist, lässt sich D_n (mit $1 := r^0$) schreiben als

$$D_n = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$$

Wegen $srs = r^{-1}$ gilt $sr^k s = r^{-k}$ (Gilt für $k = 1$. Wenn es für k gilt, so haben wir $sr^{k+1}s = sr^k ssrs = r^{-k}r^{-1}$).
Für ein Element der Form r^k gilt nun:

- $r^j r^k r^{-j} = r^{j+k-j} = r^k$
- $sr^j r^k (sr^j)^{-1} = sr^j r^k r^{-j} s = r^{-k}$

d.h. die Konjugationsklasse besteht aus r^k und seinem Inversen.
Für ein Element der Form sr^k gilt

- $r^j sr^k r^{-j} = sr^{-j} r^k r^{-j} = sr^{-j+k-j} = sr^{k-2j}$
- $sr^j sr^k (sr^j)^{-1} = r^{-j} r^k r^{-j} s = r^{k-2j} s = sr^{2j-k}$

Ist nun sr^k konjugiert zu sr^ℓ so gilt

$$\ell \equiv k - 2j \mod n \quad \text{oder} \quad \ell \equiv 2j - k \mod n. \tag{2}$$

Ist nun $n = 2m$ so gibt es also wegen der ersten Kongruenz ein $c \in \mathbb{Z}$ mit

$$\ell - k + 2j = nc = 2mc,$$

woraus folgt: 2 teilt $\ell - k$. Die zweite Kongruenz liefert 2 teilt $\ell + k$. Insgesamt haben wir, dass sr^k genau dann konjugiert zu sr^ℓ ist, wenn k und ℓ beide gerade oder ungerade sind (wenn n gerade ist).
Insgesamt Zerfällt $D_n = D_{2m}$ also in die Konjugationsklassen:

- $\{r^k, r^{-k}\}$ für $k = 0, 1, \ldots, m$,
- $\{s, sr^2, sr^4, \ldots, sr^{2(m-1)}\}$,
- $\{sr, sr^3, sr^5, \ldots, sr^{2m-1}\}$.

Bemerkung: Für ungerades n bilden die Spiegelungen $s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}$ eine einzige Konjugationsklasse.

1.3 Aufgabe 3

Sei G eine Gruppe und seien $A \subset B \subset G$ Untergruppen. Dann gilt $Z_G(A) \supset Z_G(B)$.
Sei dazu $g \in Z_G(B)$, also gilt $gbg^{-1} = b$ für alle $b \in B$. Weil $A \subset B$ gilt ebenso $gag^{-1} = a$ für alle $a \in A$, also $g \in Z_G(A)$.

Sei nun $G = S_3$, $U_0 = \{\mathrm{id}\}$, $U_1 = \langle (1\,2) \rangle$. Es gilt nun

- Es gilt $N_G(G) = N_G(U_0) = S_3$ (denn U_0, G sind normal in G) und $N_G(U_1) = U_1$ (denn U_1 ist nicht normal in G, also ist $N_G(U_1)$ eine echte Untergruppe von G, deren Ordnung von 2 geteilt wird und die U_1 enthält). Wir haben somit

$$\begin{array}{ccc} U_0 \subset & U_1 \subset & G \\ N_G(U_0) = G \not\subset & N_G(U_1) = U_1 \not\supset & N_G(G) = G \end{array}$$

  Damit sind die Aussagen (a) und (b) i.A. falsch.

- Es gilt $Z_G(G) = U_0$ (denn 3-Zykel und Transpositionen vertauschen niemals) und $Z_G(U_0) = G$ (denn id vertauscht mit jeder Permutation). Wir haben also $U_0 \subset G$ und $Z_G(U_0) \not\supset Z_G(G)$. Damit ist (c) i.A. falsch.

- Es gilt $Z(G) = Z_G(G) = U_0$ (siehe oben), $Z(U_1) = U_1$ und $Z(U_0) = U_0$ (U_1 und U_0 sind abelsch). Wir haben somit

$$\begin{array}{ccc} U_0 \subset & U_1 \subset & G \\ Z(U_0) = U_0 \not\supset & Z(U_1) = U_1 \not\subset & Z(G) = U_0 \end{array}$$

  Damit sind die Aussagen (e) und (f) i.A. falsch.

1.4 Aufgabe 4

Es war ein kleiner Fehler in der Aufgabenstellung. Man muss zusätzlich noch annehmen, dass H nicht die triviale Untergruppe ist.
Sei G eine endliche einfache Gruppe und $\{1\} \neq H \subset G$ eine Untergruppe von Index $n > 1$ (dies heißt, dass H eine echte Untergruppe ist). Sei $M := \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$.
Weil G endlich ist, ist offenbar auch M endlich (denn M ist eine Teilmenge der Potenzmenge von G). G operiert auf M durch

$$(h, gHg^{-1}) \mapsto (hg)H(hg)^{-1},$$

d.h. wir haben einen Homomorphismus

$$\iota : G \to S_M \cong S_{|M|}$$

Wir zeigen, dass ι injektiv ist. Der Kern von ι ist eine normale Untergruppe von G, also $\{1\}$ oder G, weil G einfach ist.
Angenommen $\ker\iota = G$, dann gilt $(gh)H(gh)^{-1} = hHh^{-1}$ für alle $g, h \in G$, also insbesondere $gHg^{-1} = H$ für alle $g \in G$.
Damit wäre H normal in G, was aber den Voraussetzungen widerspricht. Folglich ist $\ker\iota = \{1\}$ also ι injektiv.
Somit ist also $\iota : G \to S_M$ eine Einbettung. Nun lässt sich S_M genau dann in S_n einbetten, wenn $n \geq |M|$ gilt.
Wir zeigen also nun noch $n \geq |M|$. Sind nun g, h in der selben Linksnebenklasse, also gilt $gh^{-1} \in H$, so haben wir

$$H = gh^{-1}H(gh^{-1})^{-1} = gh^{-1}Hhg^{-1},$$

woraus $g^{-1}Hg = h^{-1}Hh$ folgt.
Ist $R := \{g_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ ein Vertretersystem der Linksnebenklassen von H in G, so haben wir also $M = \left\{gHg^{-1} \mid g \in R\right\}$, womit eine surjektive Abbildung von der n-elementigen Menge R auf die Menge M gegeben ist, also $n = |R| \geq |M|$.

1.5 Aufgabe *

Sei G eine endliche Gruppe und n die kleinste Primzahl, die die Gruppenordnung teilt. Ist nun H eine Untergruppe von G vom Index n, so ist H normal.

Beweis: G operiert auf der Menge G/H der Linksnebenklassen durch

$$(h, gH) \mapsto hgH$$

Wir haben also einen Homomorphismus $\phi : G \to S_n$.
Sei nun $h \in H$, dann gilt wegen $(hg)g^{-1} = h \in H$

$$hgH = gH \qquad \text{für alle } g \in G$$

also ist $H \subset \ker\phi$, insbesondere ist H eine Untergruppe von $\ker\phi$.
Es gilt nach dem Satz von Lagrange

$$n = [G : H] = [G : \ker\phi]\,[\ker\phi : H]\,.$$

Da n prim ist, ist $[G : \ker\phi] = 1$ oder $[\ker\phi : H] = 1$. Im zweiten Fall ist $H = \ker\phi$, womit H normal ist.
Im ersten Fall ist $G = \ker\phi$, womit gilt $ghH = hH$ für alle $g, h \in G$, was gleich bedeutend ist mit

$$g = ghh^{-1} \in H \text{ für alle } g \in G.$$

Damit ist dann $H = G$, also normal in G.